МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. Берцун

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГРАФАХ

Часть 1

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Томск – 2006

УДК 519.17
ББК 22.174
Б 527

Б 527 **Берцун В.Н.** Математическое моделирование на графах. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 88 с.

ISBN 5-89503-312-1

Учебное пособие предназначено для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов. Оно также может быть полезно студентам других специальностей и аспирантам, занимающимся математическим моделированием прикладных задач и оптимизацией вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных компьютеров (кластеров).

В части 1 пособия содержится два раздела теории графов, приведён необходимый теоретический материал, а также включены задачи для самостоятельного выполнения.

УДК 519.17
ББК 22.174

Р е ц е н з е н т:
доктор физико-математических наук **А.В. Старченко**

ISBN 5-89503-312-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время компьютерное моделирование резко расширило сферу своего применения в различных областях знаний. Это относится и к теории графов – разделу прикладной математики, который нашёл своё применение: в теории игр и квантовой химии, экономике и политике, логистике и социологии, биологии и медицине, оптимальном управлении и навигации, создании сложных программных комплексов и анализе современных компьютерных систем на основе сетей Петри [1 – 7]. Свойства графов активно используются и для решения краевых задач на сетевых системах (нефтепроводах, газопроводах, электросетях и т.д.), в решении сложных задач на многопроцессорных вычислительных системах (МВС). Граф алгоритма позволяет получить представление о том, как распространяется и преобразуется информация при его реализации [8, 9], что особенно важно для оптимизации параллельных вычислительных алгоритмов. Перспективным направлением решения сложных задач теории графов являются имитационные методы, основанные на природных механизмах принятия решений (клеточных автоматах, муравьиных алгоритмах, генетических алгоритмах и др.) [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берж К*. Теория графов и ее применения. – М., 1962. – 319 с.
2. *Оре О*. Графы и их применение. – М., 2002. – 171 с.
3. *Харари Ф*. Теория графов. – М., 2003. – 300 с.
4. *Татт У*. Теория графов. – М., 1988. – 424 с.
5. *Кристофидес Н*. Теория графов: алгоритмический подход. – М., 1978. – 432 с.
6. *Гаджинский А.М*. Основы логистики. – М.: ИВЦ «Маркетинг», 1995. – 124 с.
7. *Уилсон Р*. Введение в теорию графов. – М., 1977. – 207 с.
8. *Самарский А.А*., *Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
9. *Воеводин В.В*., *Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ – Петербург, 2002. – 608 с.
10. *Штоба С.Д.* Муравьиные алгоритмы // Журнал Exponenta Pro. (www. Exponenta. ru). – 2003. – № 4(4). – С. 70 – 73.
11. *Дистель Р*. Теория графов. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
12. *Любкин А.А*. Введение в теорию графов. – М., 1975. – 136 с.
13. *Евстигнеев В.А*., *Касьянов В.Н*. Толковый словарь по теории графов. Ч. I. – 1985. – 52 с.
14. *Евстигнеев В.А*., *Касьянов В.Н*. Толковый словарь по теории графов. Ч. II, III. – 1986. – 193 с.
15. *Емеличев В.А*., *Мельников О.И. и др.* Лекции по теории графов. – М., 1990. – 384 с.
16. *Новиков Ф.А*. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001. – 304 с.
17. *Нечепуренко М.И*. и др. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. – Новосибирск: Наука, 1990. – 515 с.
18. *Бондарев В.М*., *Рублинецкий В.И*., *Качко Е.Г.* Основы программирования. – Харьков, 1997. – 368 с.
19. *Евстигнеев В.А*., *Касьянов В.Н.* Сводимые графы и граф-модели в программировании. – Новосибирск: Изд-во ИДМИ, 1999. – 288 с.
20. *Королев Л.Н*., *Миков А.И.* Информатика. Введение в компьютерные науки. – М.: Высш. шк., 2003. – 341 с.

21. *Котов В.Е.* Сети Петри. – М.: Наука, 1984. – 170 с.
22. *Малышкин В.Э.* Параллельное программирование мультикомпьютеров. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 296 с.
23. *Макконнелл Дж.* Анализ алгоритмов. Вводный курс. – М.: Техносфера, 2002. – 304 с.
24. *Касьянов В.Н.*, *Евстигнеев В.А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 1104 с.
25. *Евстигнеев В.А.*, *Касьянов В.Н.* Алгоритмы на деревьях. – Новосибирск, 1989. – 311 с.
26. *Пермякова Н.В.* Спецглавы математики. Часть 2. Теория графов. – Томск, 2000. – 125 с.
27. *Мещеряков М.В.* Избранные лекции по дискретной математике. Ч. 1. Комбинаторика и графы. – Саранск, 2003. – 116 с.
28. *Евстигнеев В.А.* Применение теории графов в программировании. – М., 1985. – 352 с.
29. *Риордан Д.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: ИЛ, 1963. – 287 с.
30. *Физика* / Под ред. А.С. Ахматова. – М.: Наука, 1965. – 900 с.
31. *Бауэр Ф.Л., Гооз Г.* Информатика. Вводный курс. – М.: Мир, 1990. – 400 с.
32. *Кемени Дж.*, *Снелл Дж.*, *Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. – М.: ИЛ, 1983. – 486 с.
33. *Гергель В.П., Стронгин Р.Г.* Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных машин. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – 176 с.
34. *Левитин К.Е.* Геометрическая рапсодия. – М.: Знание, 1984. – 175 с.
35. *Люстерник Л.А.* Выпуклые тела. – Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 75 с.
36. *Касаткин В.Н.* Необычные задачи математики. – Киев, 1987. – 125 с.
37. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение. – М., 1979. – 143 с.
38. *Гарднер М.* Числа Каталана // Квант. – 1978. – № 7.9
39. *Кочкаров Р.А.*, *Малинецкий Г.Г.* Стойкость, управление риском и обеспечение безопасности сложных технических систем // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. – 2005. – № 4. – С. 12 – 25.
40. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345 с.
41. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука, 1993. – 367 с.
42. *Берцун В.Н.*, *Минакова Е.А.* Математическое моделирование теплообмена в элементах, имеющих графовую структуру. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – С. 69 – 70.

43. *Фрязинов И.В.* Алгоритм решения разностных задач на графах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т. 10. – № 2.
44. *Абакумов М.В.*, *Гаврилюк К.В.*, *Есикова Н.Б. и др.* Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // Дифференциальные уравнения. – 1997. – № 33(7). – С. 892 – 898.
45. *Абакумов М.В., Есикова Н.Б., Мухин С.И. и др.* Разностная схема решения задач гемодинамики на графе / Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1998.
46. *Препарата Ф.*, *Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
47. *Делоне Б.Н.* О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМЕН. – 1934. – № 4. – С. 793 – 800.
48. *Скворцов А.В.*, *Костюк Ю.Л.* Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне // Геоинформатика. Теория и практика. Вып. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. – С. 22 – 47.
49. *Ильман В.М.* Алгоритмы триангуляции плоских областей по нерегулярным сетям точек // Алгоритмы и программы, ВИЭМС. Вып. 10 (88). – М., 1985. – С. 3 – 35.
50. *Берцун В.Н.* Сплайны сеточных функций. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. –124 с.
51. *Делоне Б.Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // Успехи матем. наук. – 1937. – Вып. 3. – С. 16 – 62; Ч. 2 // 1938. – Вып. 4. – С. 102 – 164.
52. *Михайлова Н.В.*, *Тишкин В.Ф.*, *Тюрина Н.Н. и др.* Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 9. – С. 1392 – 1406.
53. *Неледова А.В.*, *Тишкин В.Ф.* Использование адаптивных сеток нерегулярной структуры для расчета разрывных течений с повышенным порядком точности // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 976 – 985.
54. *Абалакин И.В.*, *Жохова А.В.*, *Четверушкин Б.Н.* Кинетически согласованные разностные схемы на нерегулярных сетках // Мат. моделирование. – 1997. – Т. 9. – № 7. – С. 44 – 63.
55. *Вабищевич П.Н.*, *Самарский А.А.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции – диффузии на треугольных сетках // Ж. вычисл. математем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42. – № 9. – С. 1368 – 1382.
56. *Sibson R.* A brief description of the natural neighbour interpolant // Interpreting Multivariate Data. – Chichester: Wiley, UK, 1981. – P. 21 – 36.
57. *Беликов В.В.*, *Иванов В.Д.*, *Канторович В.К.* и др. Несибсоновская интерполяция – новый метод интерполяции значений функции на произ-

вольной системе точек // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 1. – С. 11 – 17.

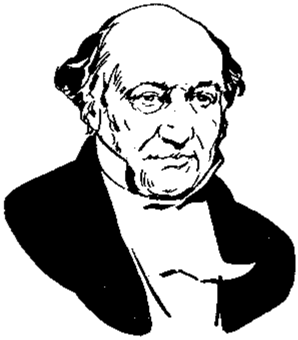
58. *Sukumar N.* Sibson and non-Sibsonian interpolants for elliptic partial differential equations // Proceedings of the First MIT Conference on Fluid and Solid Mechanics. Vol. 2 / Bathe K.J. (ed.). – Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Press, 2001. – P. 1665 – 1667.
59. *Боголюбов А.Н.* Математики и механики. – Киев, 1983. – 638 с.
60. *Круликовский Н.Н.* Из истории развития математики в Томске. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. –174 с.
61. *Депман И.Я.* История арифметики. – М.: Просвещение, 1965. – 415 с.

БИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ВОРОНОЙ Георгий Федосеевич (1868 – 1908). Русский математик, член-корреспондент Петербургской АН (с 1907 г.) [59]. Родился в с. Журавка (ныне Черниговской обл.). Окончил Петербургский университет (1889 г.). В 1890 – 1893 гг. работал там же, с 1894 г. – в Варшавском университете (с 1897 г. – профессор). В 1907 г. принимал участие в организации в Новочеркасске Донского политехнического института.

Основные работы посвящены теории чисел. Первым объектом научных интересов Вороного была теория алгебраических чисел, а именно – теория иррациональностей третьей степени. Он подверг тщательному анализу вопрос о базисе кубического поля и выработал удобные вычислительные способы определения разложения как простых рациональных чисел, так и целых чисел кубического поля на простые идеальные множители, и всех целых чисел кубического поля, делящихся на данное идеальное число. Предложил алгоритмы, служащие обобщением непрерывных дробей.

В 1894 – 1908 гг. проводил исследования в направлениях арифметической теории квадратичных форм и аналитической теории чисел. В первом направлении Вороной оказался продолжателем кристаллографических исследований Е.С. Федорова: он выяснил, что построенные Федоровым области в пространстве *n* измерений могут однозначно заполнять все пространство, и пришел к определению выпуклых многогранников, обладающих группой переносов, с помощью которых они однозначно заполняют многомерное пространство, – параллелоэдров. Занимался также теорией функций, в частности теорией ζ-функций Римана.



ГАМИЛЬТОН Уильям Роуан (1805 – 1865). Ирландский математик, член Ирландской АН (с 1837 г.), в 1837 – 1845 гг. – ее президент. Родился в Дублине. Научные таланты Гамильтона проявились рано: уже в возрасте 13 лет он достаточно свободно владел 13 языками, в 16 лет, изучая «Небесную механику» Лапласа, обнаружил в ней ошибку в доказательстве параллелограмма сил. Окончил Дублинский университет (1827 г.). Работал там же (с 1827 г. – профессор).

Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению. Развил (1830 – 1837) математическую оптику, а затем распространил свои методы на механику. Исследовал теорию комплексных чисел. Идею комплексных чисел распространил на пространство, определив четыре единицы: 1, i, j, k, связанные соотношениями:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

ДЕЛОНЕ Борис Николаевич (1890 – 1980). Советский математик, член-корреспондент АН СССР (с 1929 г.). Сын Н.Б. Делоне. Родился в Петербурге. Окончил Киевский университет (1913 г.). Ученик Д.А. Граве. В 1913 – 1916 гг. преподавал там же, в 1916 – 1922 гг. – в Киевском политехническом институте, в 1922 – 1935 гг. – в Ленинградском университете (с 1926 г. – профессор), с 1932 г. работал в Математическом институте АН СССР. Одновременно в 1935 – 1942 гг. – в Московском университете.

Основные работы посвящены алгебре, теории чисел, математической кристаллографии, истории математики. Исследовал решения в целых числах неопределенных уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Цикл работ относится к геометризации теории Галуа.

Разрабатывал теории правильного разбиения пространства, приведения квадратичных форм, решетчатых покрытий пространства сферами. Ряд работ относится к геометрической кристаллографии. Бывал в Томске, поддержал издание трудов Ф.Э. Молина [60]. Международная премия им. Н.И. Лобачевского (1977 гг.). Член Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина».

КАТАЛАН Эжен Шарль (30.V.1814 – 14.II.1894). Бельгийский математик, член Бельгийской АН (с 1865 г.). Родился в Брюгге. Окончил Политехническую школу в Париже. Преподавал там же и в Сорбонне. В 1849 г. отказался присягнуть Наполеону III и был лишен права преподавания. С 1865 г. – профессор Льежского университета.

Основные работы относятся к геометрии, работал также в области математического анализа и механики. Одновременно с К.Г.Я. Якоби и М.В. Остроградским предложил метод замены переменных в кратных интегралах. Ему принадлежит постановка проблемы о том, что уравнение $x^z - y^t = 1$ не имеет решений в натуральных числах при x, y, z, t, больших единицы, кроме тривиального $3^2 - 2^3 = 1$. Именем Каталана названа линейчатая поверхность, прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости.

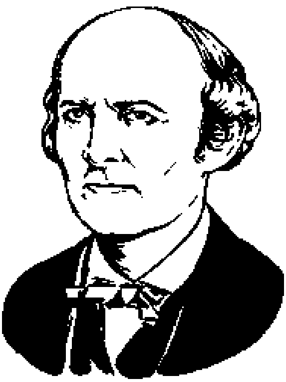
Член-корреспондент Петербургской АН (с 1881 г.).

КУРАТОВСКИЙ Казимеж (1896 – 1980). Польский математик, член Польской АН (с 1954). Родился в Варшаве. В 1913 – 1920 гг. учился в университетах Глазго и Варшавы. С 1921 г. – профессор Варшавского университета, в 1927 – 1934 гг. – профессор Львовского политехникума, с 1948 г. – директор Математического института в Варшаве. С 1957 г. – вице-президент Польской АН.

Основные работы относятся к топологии, теории графов, теории множеств и теории функций действительного переменного. Один

из главных представителей польской топологической школы. Независимо от Л.С. Понтрягина в 1930 г. получил и опубликовал критерий планарности графа. Развил аксиоматику общего топологического пространства, исследовал проблемы множественной топологии на плоскости. Начиная с середины 1940-х гг. занимался поисками связей между топологией и теорией аналитических функций. Его работа «Топология» (1934 г.) была издана в русском переводе (Т. 1 – 2, 1966 – 1969 гг.).

Президент Польского математического общества (1946 – 1953 гг.). Иностранный член АН СССР (с 1966 г.).



КЭЛИ Артур (1821 – 1895). Английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1852 г.). Родился в Ричмонде. До 1838 г. жил в Петербурге. Окончил Кембриджский университет (1841 г.). В 1843 – 1863 гг. занимался адвокатурой, одновременно проводил математические исследования, с 1863 г. – профессор Кембриджского университета.

Основные математические работы относятся к алгебре и алгебраической геометрии. Начал (1858 г.) разработку теории матриц. Заложил основы теории алгебраических инвариантов. Разработал основные понятия абстрактной теории конечных групп. Установил существование связи между теорией инвариантов и проективной геометрией. На его исследованиях базируется так называемая интерпретация Кэли – Клейна геометрии Лобачевского. Изучал геометрию в пространстве *n* измерений, теорию дифференциальных уравнений. Занимался небесной механикой, кинематикой механизмов.

Член-корреспондент Петербургской АН (с 1870 г.).

ПОНТРЯГИН Лев Семенович (1908 – 1988). Советский математик, академик (с 1958 г.), член-корреспондент АН СССР (с 1939 г.). Родился в Москве. В 14-летнем возрасте потерял зрение в результате несчастного случая. Окончил Московский университет (1929 г.). В 1927 г. доказал (но не опубликовал) критерий планарности графа. С 1930 г. работал в Московском университете (с 1935 г. – профессор), одновременно с 1939 г. – в Математическом институте АН СССР.

Основные работы относятся к теории дифференциальных уравнений, топологии, теории колебаний, теории управления, алгебре. Создал математическую теорию оптимальных процессов, в основе которой лежит принцип максимумов Понтрягина.

Почетный член Международной академии астронавтики (с 1966 г.), вице-президент Международного математического союза (1970 – 1974 гг.), почетный член АН ВНР (с 1972 г.). Герой Социалистического Труда (1969 г.). Ленинская премия (1962 г.), Государственная премия СССР (1941 г.), Международная премия им. Н.И. Лобачевского (1966 г.).

ЭЙЛЕР Леонард (1707 – 1783). Математик, механик, физик и астроном, академик Петербургской АН (с 1726 по 1741 г. и с 1766 г.). Родился в Базеле (Швейцария). Окончил Базельский университет (1724 г.). Одним из его учителей был Йоганн Бернулли. В 1726 г. Эйлер был приглашен в Петербургскую АН и в мае 1727 г. прибыл в Петербург. С 1726 г. – адьюнкт физиологии, позднее – математики, с 1731 г. – профессор физики и теоретической механики, 1731 – 1741 гг. – профессор

математики. В 1736 г. опубликовал трактат «Механика, или наука о движениях в аналитическом изложении», где впервые была изложена динамика точки и введено понятие силы инерции. В 1738 г. (через 35 лет после издания «Арифметики» Л.Ф. Магницкого) издал книгу «Введение в искусство счета, для употребления в гимназии при Императорской академии Наук в С.-Петербурге» [61]. В 1741 г. переехал в Берлин, где прожил 25 лет. С 1744 г. – директор Математического класса Берлинской АН. В 1755 г. Эйлер установил законы равновесия жидкостей, дал общие уравнения гидродинамики. Он заложил основы теории гидравлических турбин, развил новую теорию полета снаряда. В 1766 г. возвратился в Петербург, а в 1768 г. предложил численный метод решения задачи Коши.

Эйлер ввел символ e для основания натурального логарифма, i – для корня из –1, ΔY – для конечной разности, $\sum$ – для суммы, придумал названия тригонометрических функций, ввел двойные интегралы и др. Эйлер обладал феноменальной памятью. В 1771 г. в результате болезни он почти полностью потерял зрение, однако около половины его научных работ было написано после 1771 г.

Научные интересы Эйлера относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы. Он является основателем русской математической школы.

Список трудов Эйлера содержит около 850 названий, в их числе ряд многотомных монографий; из них при жизни было опубликовано около 550. «Творчество Эйлера изумительно и в науке беспримерно», – писал академик А.Н. Крылов.

Эйлер – иностранный почетный член Петербургской АН (с 1742 по 1766 г.), член Парижской АН, Берлинской АН, Лондонского королевского общества и многих других академий наук и научных обществ.

Владимир Николаевич Берцун

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГРАФАХ

Часть 1

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Полковникова*

Дизайн, верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 954240

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 18.12.2006.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 8,23 Тираж 200 экз. Заказ № 55.

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1