

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

К.Б.Джакупов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Алматы-2011

УДК 532 (075.8)

ББК 22.253 я73

Д 40

*Рекомендовано к изданию
Ученым Советом механико-математического факультета КазНУ
им.Аль-Фараби*

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук , профессор

С.Я.Серовайский;

доктор физико-математических наук , профессор

С.Т.Мухамеджанов

Джакупов Кенес Бажкенович

Д 40 Вычислительная механика-Алматы: 2010.-291с.

ISBN 978-601-247-148-9

В учебном пособии излагаются вычислительные методы решения фундаментальных уравнений динамики материальной точки, гидродинамики, теории упругости, электродинамики.

Рекомендована бакалаврам, магистрантам, аспирантам, докторантам специальности «механика»

ББК 22.253 я73

ISBN 978-601-247-148-9

© Джакупов К.Б.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Модуль-1. ТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	8
§1. Метод исключения <i>Гаусса</i> с выделением главного элемента.....	8
§2. Метод прогонки.....	10
§3. Метод простой итерации <i>Якоби</i> . Основные понятия итерационных методов.....	11
§4. Метод <i>Некрасова-Зейделя</i>	14
§5. Метод минимальных невязок <i>Красносельского-Крейна</i>	16
§6. Вычисление корней уравнения. Метод простой итерации. Метод половинного деления. <i>Метод Ньютона</i> . Метод хорд.....	19
Модуль -2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ	20
§1. Сетки и сеточные функции.....	20
§2. Элементарные разностные операторы.....	22
§3. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяцион- ный метод баланса в ячейке. Аппроксимация <i>Аллена-Саусвелла</i>	25
§4. Разностные конвективные члены с «аппроксимационной вязкостью». Аппроксимация <i>Булеева-Петрищева</i>	33
§5. Разностные конвективные члены без «аппроксимационной вязкости». Аппроксимация <i>Джакупова</i>	35
§6. Аппроксимации диссипативных членов.....	39
§7. Численное интегрирование. Формулы <i>Ньютона-Котеса</i>	40
§8. Интерполирование сплайнами промежуточных значений сеточной функции. Простая интерполяция.....	41
Модуль-3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТА, ЭЙЛЕРА	49
§1. Дифференциальные уравнения динамики точки.....	49
§2. Методы <i>Рунге-Кутта</i> 4-го порядка точности.....	50
§3. Методы <i>Эйлера</i>	51
Модуль-4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА	53
§1. Уравнения динамики вязкой жидкости.....	54
§2. Уравнения <i>Гельмгольца</i>	56
§3. Уравнения теплопроводности.....	58
§4. Уравнения диффузии.....	58
§5. Уравнения распространения тепла в газах.....	59
§6. Уравнения <i>Бюргерса</i>	60
Модуль-5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ	

ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	61
§1. Постановка задачи.....	61
§2. Семейство явных схем.....	61
§3. Теорема эквивалентности <i>Лакса-Рихтмайера</i>	69
§4. Явная схема уравнения теплопроводности	70
§5. Явные схемы одномерного уравнения диффузии.....	70
§6. Схема с центральной разностью для конвективного члена уравнения <i>Бюргера</i>	71
§7. Явная схема с «аппроксимационной вязкостью».....	72
§8. Явная 2-го порядка точности схема без «аппроксимационной вязкости».....	74
§9. Некоторые сведения из теории линейных операторов. Исследование устойчивости схем методом оценки нормы операторов перехода.....	75
§10. Неявные схемы.....	79
§11. Абсолютно устойчивые неявные схемы.....	82
§12. Монотонные схемы. Алгоритмы решения.....	85
§13. Схемы при краевых условиях <i>фон Неймана</i>	90
§14. Метод первого дифференциального приближения.....	91
§15. Исследование устойчивости методом <i>фон Неймана</i>	93
§16. Схема («ромб») <i>Дюфорта-Френкеля</i>	95
§17. Абсолютно неустойчивая схема (чехарда) <i>Ричардсона</i>	96
§18. Схема <i>Кранка-Николсона</i>	97
§19. Технология построения монотонных схем.....	97
§20. Сходимость схемы типа <i>Кранка-Николсона</i> . Леммы.....	100
§21. Консервативные схемы. Метод энергетических неравенств.....	109
Модуль-6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	116
§1. Постановка задачи.....	116
§2. Явные монотонные схемы.....	116
§3. Явная неоднородная схема без «аппроксимационной вязкости».....	119
§4. Схема типа <i>Кранка-Николсона</i>	119
§5. Схема <i>Письмана-Ракфорда</i>	121
§6. Схема альтернативных направлений с граничными условиями <i>Кряквиной-Дьяконова</i>	122
§7. Схема альтернативных направлений типа <i>Самарского А.А.</i>	125
§8. Схема <i>Дугласа-Ракфорда</i> . Схема стабилизирующей поправки.....	128
§9. Схема расщепления <i>Яненко Н.Н.</i>	131
§10. Метод факторизации <i>Марчука-Яненко</i>	132

§11. Схема расщепления с весами. Проблема определения граничных значений промежуточных величин.....	141
§12. Монотонные однородные схемы 2-го порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с <i>постоянным</i> коэффициентом молекулярной диффузии.....	144
§13. Монотонные однородные схемы 2-го порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с <i>переменным</i> коэффициентом молекулярной диффузии.....	146
§14. Эффективная реализация неявных схем методом простой итерации <i>Якоби</i>	149
Модуль-7. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.....	153
§1. Стационарные уравнения <i>Гельмгольца</i> для вихря скорости и функции тока.....	153
§2. Стационарные уравнения теплопроводности.....	153
§3. Уравнения потенциала скорости.....	153
§4. Уравнения гидродинамического давления.....	154
§5. Уравнение потенциала электростатического поля.....	155
Модуль-8. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ.....	156
§1. Метод <i>Якоби</i>	156
§2. Метод <i>Либмана-Зейделя</i>	159
§3. Сходимость итерационного процесса.....	161
§4. Итерационный метод <i>Письмана-Ракфорда</i>	163
§5. Итерационный метод <i>Дугласа-Ракфорда</i>	165
§6. Метод верхней релаксации.....	166
§7. Параметрический метод.....	166
Модуль-9. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.....	170
§1. Уравнения возмущений плотности, скорости и давления в одномерных течениях идеального газа.....	170
§2. Уравнения акустики.....	170
§3. Уравнения теории упругости с симметричным тензором напряжений <i>Ламе</i> ($\mu^o = \mu$) и с несимметричным тензором напряжений <i>Джакупова</i> ($\mu^o = 0$).....	171
§4. Уравнения электродинамики.....	172
Модуль-10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ.....	173
§1. Явная схема. Критерий <i>Куранта</i>	173
§2. Неявная схема.....	175

§3. Полуявные схемы уравнений теории упругости.....	176
§4. Итерационный алгоритм <i>Якоби</i>	189
§5. Глобальные итерационные алгоритмы.....	191
§6. Решение трехмерных задач теории упругости на равномерной сетке.....	195
§7. Численный алгоритм решения гиперболических уравнений электродинамики.....	201
Модуль-11. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ.....	214
§1. Постановка задачи продольного обтекания пластины.....	215
§2. Технологии построения разностных схем уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке. Полуявные разностные схемы <i>Джакупова</i>	219
§3. Алгоритм реализации полуявной схемы.....	223
§4. Технология получения разностных уравнений для давления.....	225
§5. Итерационные алгоритмы. Метод глобальных итераций.....	231
§6. Без «схемной вязкости» аппроксимация конвективных членов.....	244
§7. Полуявная схема решения трехмерных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости.....	246
§8. <i>Программа на TURBO-PASCAL</i>	254
Модуль-12. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВИХРЯ СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ ТОКА.....	259
§1. Постановка задачи.....	259
§2. Явная схема.....	265
§3. Схема альтернативных направлений. Итерационный алгоритм.....	268
Модуль-13. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ.....	269
§1. Разностная схема модели <i>Форцгеймера</i>	269
§2. Коррекция модели <i>Форцгеймера</i> . Разностная схема.....	275
§3. Коррекция модели <i>Нумерова</i> фильтрации в насыщенных пористых средах.....	276
Модуль-14. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	277
§1. Полуявная разностная схема <i>Джакупова</i>	278
§2. Решение уравнений давления методом глобальных итераций.....	283
Литература.....	284

ВВЕДЕНИЕ

Содержание данного учебного пособия основано на материалах лекций, прочитанных автором в течение многих лет на кафедре механики КазНУ им.Аль-Фараби. Соответственно специализации этой кафедры в доступной и теоретически обоснованной форме излагаются популярные методы решения алгебраических уравнений и их систем, наиболее распространенные методы численного дифференцирования, интегрирования, интерполирования, численные алгоритмы решения задачи Коши для основного уравнения динамики материальной точки, сеточные методы решения поставленных для фундаментальных уравнений гидромеханики, теории упругости, тепло-массопереноса, электродинамики начально-краевых задач.

Излагаются принципы конструирования явных, неявных и метода переменных направлений разностных схем уравнений в частных производных параболического, эллиптического и гиперболического типов и специфических уравнений механики сплошной среды, электродинамики. Основное внимание уделяется обоснованию таких основополагающих теоретических аспектов численных методов, как устойчивость, сходимость разностных схем и итерационных алгоритмов, адекватная постановка граничных условий для промежуточных величин в схемах метода дробных шагов, выводу замкнутой системы разностных уравнений в задачах гидродинамики, теории упругости, электродинамики.

Автор поставил целью изложить в учебном пособии только тот лекционный материал, который, с его точки зрения, будет полезен учащимся бакалавриата, магистратуры, аспирантуры при использовании компьютерных методов в прикладных исследованиях, рекомендуя для углубленного изучения методов вычислительной математики к работам Н.Н.Яненко, Г.И.Марчука, А.А.Самарского, С.К.Годунова, Б.Г.Кузнецова, О.Ф.Васильева, Б.Л.Рождественского, А.Н.Коновалова, У.М.Султангазина, В.Н.Берцуна, Ю.А.Березина, В.В.Пененко, В.П.Ильина, А.И.Толстых, В.М.Ковеня, В.А.Левина, С.Ф.Чекмарева, Ю.С.Завьялова, В.М.Пасконова, Е.С.Николаева, А.Н.Валиуллина, Ю.А.Кузнецова, В.В.Шайдурова, И.К.Яушева, А.Ф.Воеводина, В.Н.Игнатьева, Г.Г.Черных, В.Д.Лисейкина и других авторов.

Пусть теперь в общем случае наибольшим по модулю элементом I -ой строки будет a_{Ik} . Для исключения неизвестной величины x_k из i -ой строки ($i \neq I$), I -ая строка умножается на a_{ik}/a_{Ik} после чего вычитается из i - строки. Эта операция выполняется до тех пор, пока не получится треугольная система

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1,$$

$$x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$

.....

$$x_n = \beta_n$$

Для вычисления стоящих здесь элементов используется матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \gamma_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots \alpha_{1n} & & \beta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \alpha_{23} \dots \alpha_{2n} & & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} \dots \alpha_{nn} & & \beta_n \end{array} \right)$$

Элементы данной матрицы находятся с помощью рекуррентных формул (см. /23/):

$$\gamma_{i1} = a_{i1}, (i = 1, 2, \dots, n); \alpha_{1k} = a_{i1}a_{1k}/a_{11}, (k = 2, 3, \dots, n);$$

$$\gamma_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk}, (i, k = 2, 3, \dots, n; i \geq k),$$

$$\alpha_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk}) / \gamma_{ii}, (i, k = 2, 3, \dots, n; i < k);$$

$$\beta_1 = b_1 / a_{11}, \beta_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \beta_j) / \gamma_{ii}, (i = 2, 3, \dots, n)$$

Определитель системы вычисляется по формуле

$$\det[a_{ik}] = \gamma_{11} \gamma_{22} \dots \gamma_{nn}$$

Для симметрической матрицы $[a_{ik}]$ вычисления упрощаются

$$\alpha_{ik} = \gamma_{ki} / \gamma_{ii}, \quad (i, k = 2, 3, \dots, n; i < k)$$

§2. Метод прогонки

В разностных схемах имеют место быть трехдиагональные и пятидиагональные матрицы и для решения систем уравнений в таких случаях эффективны методы прогонки, которые также являются точными методами.

Идея метода прогонки здесь излагается для *трехдиагональной* матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{12} & a_{12} \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В этом случае система (1) принимает специфическую форму:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} = b_i, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n,$$

и ее решение ищется в виде связи

$$x_i = Z_i x_{i+1} + Y_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,$$

где по рекуррентным формулам прямой прогонки предварительно вычисляются Z_i, Y_i :

$$Z_1 = -a_{12} / a_{11}, \quad Y_1 = b_1 / a_{11}, \quad Z_i = a_{ii+1} / (-a_{ii} - a_{ii-1}Z_{i-1}),$$

$$Y_i = (a_{ii-1}Y_{i-1} - b_i) / (-a_{ii} - a_{ii-1}Z_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n-1$$

Затем решается система из 2-х уравнений относительно x_{n-1}, x_n :

$$a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n,$$

$$x_{n-1} - Z_{n-1}x_n = Y_{n-1},$$

откуда находится $x_n = (b_n - a_{nn-1}Y_{n-1}) / (a_{nn} + a_{nn-1}Z_{n-1})$, после чего отыскиваются обратной прогонкой все искомые

$$x_i = Z_i x_{i+1} + Y_i, i = n-1, n-2, \dots, 1$$

В монографии «Методы решения сеточных уравнений» Самарского А.А., Николаева Е.С. приводятся уникальные теории и формулы матричных, векторных и других вариантов прогонки. В этой же книге обоснована корректность формул трехточечной прогонки при выполнении условий диагонального преобладания коэффициентов системы

$$|a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| \leq |a_{ii}|, i = 2, \dots, n-1$$

Алгоритмы трехточечной периодической прогонки разработаны в /11/, пятиточечной периодической прогонки в /10/.

§3. Метод простой итерации Якоби. Основные понятия итерационных методов

Метод простой итерации Якоби. В этом методе в системе (1) производится перестановка строк таким образом, чтобы на левой главной диагонали стояли наибольшие по модулю элементы матрицы. Пусть такие перестановки осуществлены, после чего система (1) переписывается в кратком виде

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, i = 1, \dots, n \quad (3)$$

В любом итерационном методе задается произвольное начальное значение искомым неизвестных (*нулевая итерация – нулевое приближение*)

$$x_k^0 = b_k, k = 1, \dots, n$$

Поскольку диагональные элементы определителя отличны от нуля: $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$, следующие итерации $x_k^j, k = 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, j^*$ находятся по алгоритму:

$$x_i^{j+1} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^j - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^j), i = 1, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, j^* \quad (4)$$

На каждой итерации j вычисляются невязки

$$R_i^j = b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^j, i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Алгоритм (4) через невязки записывается в виде

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{1}{a_{ii}} R_i^j, i = 1, \dots, n,$$

Очевидно, на точном решении системы (3) невязки равны нулю $R_i^j = 0, i = 1, \dots, n$. Поэтому необходимо, чтобы в пределе эти невязки стремились к нулю $\lim_{j \rightarrow \infty} R_i^j = 0, i = 1, \dots, n$. Имея это в виду, критерием остановки итерационного процесса на номере j^* выбирают выполнение следующего неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq n} |R_i^{j^*}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \quad (6)$$

Данное неравенство называется критерием сходимости итераций. Последние приближения $x_k^{j^*}, k = 1, \dots, n$ принимаются в качестве решения системы (3): $x_k \approx x_k^{j^*}, k = 1, \dots, n$.

Для доказательства сходимости итерационных алгоритмов вводится понятие *погрешности итераций*

$$\varepsilon_k^j = x_k^j - x_k, k = 1, \dots, n$$

Подставляя $x_k^j = \varepsilon_k^j + x_k$ в (4)

$$\varepsilon_i^{j+1} + x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \varepsilon_k^j \right) + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k \right), i = 1, \dots, n,$$

и, учитывая тот факт, что $x_k, k = 1, \dots, n$ являются точным решением системы (3), получаем для погрешности итераций

$$\varepsilon_i^{j+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \varepsilon_k^j \right), i = 1, \dots, n \quad (6')$$

Сходимость итерационного алгоритма означает, что в пределе должно быть

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^j = x_k, k = 1, \dots, n,$$

что эквивалентно стремлению погрешности итераций к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_k^j - x_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_k^j = 0, k = 1, \dots, n$$

Следовательно, в любом итерационном процессе надо доказать выполнение предела $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_k^j = 0, k = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Для сходимости метода Якоби достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством диагонального преобладания

$$\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| < |a_{ii}|, i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Доказательство. Возьмем по модулю от обеих частей (6')

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i^{j+1}| &= \left| \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \varepsilon_k^j \right) \right| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| |\varepsilon_k^j| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| |\varepsilon_k^j| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k^j| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k^j| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \right\} \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k^j| < \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k^j|, i = 1, \dots, n, \quad (6'') \end{aligned}$$

так как по условию (*) теоремы имеет место неравенство

$$\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| < 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Неравенства (6''), очевидно, имеют место и для $\max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{j+1}|$:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{j+1}| < \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k^j|$$

Поменяв индекс "k" на индекс "i", получаем монотонно убывающую последовательность положительных чисел, пределом которых, как известно, является 0:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{j+1}| < \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^j| < \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{j-1}| < \dots < \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^2| < \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^1| < \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^0|$$

В пределе $\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{j+1}| = 0$, следовательно, метод Якоби сходится при указанном свойстве (*) элементов матрицы, ч.т.д.

Метод Якоби не сходится, если нет свойства (*).

Для произвольной, но разрешимой системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

не обладающих диагональным преобладанием, метод *Якоби* применяется для симметризованной системы, полученной умножением на транспонированную матрицу $A^* = [a_{ik}^* = a_{ki}]$:

$$A^* Ax = A^* b,$$

где матрица $C = A^* A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей. Для системы уравнений

$$Cx = d, \quad d = A^* b,$$

$$C = [c_{ms}], d = [d_m], c_{ms} = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* a_{ks} = \sum_{k=1}^n a_{km} a_{ks}, d_m = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* b_k = \sum_{k=1}^n a_{km} b_k,$$

метод *Якоби* является сходящимся

$$x_i^{j+1} = \frac{1}{c_{ii}} (d_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} x_k^j - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k^j), i=1, \dots, n, j=0, 1, \dots, j^*,$$

эквивалентная запись которой

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{1}{c_{ii}} (d_i - \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k^j), i=1, \dots, n, j=0, 1, 2, \dots, j^*$$

через невязку $R^j = (d - Cx^j)$ имеет вид

$$R_i^j = (d_i - \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k^j), x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{1}{c_{ii}} R_i^j, i=1, \dots, n, j=0, 1, 2, \dots, j^*$$

§4. Метод Некрасова-Зейделя

Метод *Некрасова-Зейделя* реализуется по алгоритму

$$x_i^{j+1} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{j+1} - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^j), i=1, \dots, n, j=0, 1, 2, \dots, j^*, \quad (7)$$

тем самым используются насчитанные значения $x_k^{j+1}, k < i$.

Итерации прекращаются при выполнении критерия (6).

В §3 метод простой итерации представлен в виде

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^j), i=1, \dots, n, \quad (8)$$

в аналогичной форме записывается метод *Некрасова-Зейделя*

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{j+1} - \sum_{k=i}^n a_{ik} x_k^j), i=1, \dots, n, \quad (9)$$

В связи с этим за критерий сходимости итераций выбирают

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_i^{j+1} - x_i^j) = 0, i = 1, \dots, n,$$

т.е. прекращение итерационного процесса на номере j^* производится при выполнении неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{j^*+1} - x_i^{j^*}| \leq \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\varepsilon} \approx 0, \hat{\varepsilon} \neq 0 \quad (10)$$

Данный критерий *опасный обманчивый* критерий. В самом деле, перепишем (8) с использованием невязки

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}} (b_k - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^j) = \frac{1}{a_{ii}} R_i^j, i=1, \dots, n$$

По основному критерию (6) должно выполняться неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq n} |R_i^{j^*}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii} (x_i^{j^*+1} - x_i^{j^*})| \leq \varepsilon, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \quad (11)$$

Поэтому между (10) и (11) возникает связь

$$\hat{\varepsilon} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}| \leq \varepsilon \quad (12)$$

Если $\max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$ будет очень большим числом, то $\hat{\varepsilon}$ несомненно

должен быть соответственно малой величиной. В методе *Некрасова-Зейделя* также имеет место данное обстоятельство.

Теорема 2. Для сходимости метода *Некрасова-Зейделя* достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством *диагонального преобладания* (*).

Доказательство совершенно аналогично вышеприведенному.

Для произвольной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, i = 1, \dots, n,$$

не обладающих свойствами *диагонального преобладания*, метод *Некрасова-Зейделя* применяется для симметризованной

системы, полученной умножением на транспонированную матрицу $A^* = [a_{ik}^* = a_{ki}]$:

$$A^* Ax = A^* b,$$

где матрица $C = A^* A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей, и затем система уравнений

$$Cx = d, \quad d = A^* b,$$

$$C = [c_{ms}], d = [d_m], c_{ms} = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* a_{ks} = \sum_{k=1}^n a_{km} a_{ks}, d_m = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* b_k = \sum_{k=1}^n a_{km} b_k,$$

решается методом *Некрасса-Зейделя*

$$x_i^{j+1} = \frac{1}{c_{ii}} (d_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} x_k^{j+1} - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k^j), i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, j^*$$

§5. Метод минимальных невязок *Красносельского-Крейна*

Метод, основанный на минимизации норм невязок, предложен в /14/. Система (1) записывается в матрично-векторном виде

$$Ax = b,$$

где $A = [a_{ik}]$ - матрица и соответствующие вектора

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^j \end{pmatrix}, \quad R^j = \begin{pmatrix} R_1^j \\ R_2^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n^j \end{pmatrix}$$

Итерационный алгоритм строится в виде

$$x^{j+1} = x^j + \theta(b - Ax^j),$$

что через вектор невязки $R^j = (b - Ax^j)$ записывается так

$$x^{j+1} = x^j + \theta R^j, \quad (13)$$

где $\theta = \text{const}$ - итерационный параметр, выбираемый из условия минимизации невязки. С этой целью обе части (13) слева умножаются на матрицу A после чего вычитается вектор b :

$$b - Ax^{j+1} = b - Ax^j - \theta AR^j, \quad (14)$$

что эквивалентно следующему выражению

$$R^{j+1} = R^j - \theta AR^j \quad (15)$$

Скалярное умножение (15) на вектор R^{j+1} , дает:

$$\begin{aligned} (R^{j+1}, R^{j+1}) &= (R^j - \theta AR^j, R^j - \theta AR^j), \\ (R^{j+1}, R^{j+1}) &= (R^j, R^j) - 2\theta(AR^j, R^j) + \theta^2(AR^j, AR^j) \end{aligned} \quad (16)$$

Удобна запись (16) с помощью модуля вектора

$$\|R^{j+1}\|^2 = \|R^j\|^2 - 2\theta(AR^j, R^j) + \theta^2 \|AR^j\|^2, \quad (17)$$

где $\|R^{j+1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (R_i^{j+1})^2$, $(AR^j, R^j) = \sum_{i=1}^n (AR^j)_i R_i^j$, $\|AR^j\|^2 = \sum_{i=1}^n (AR^j)_i^2$

Точка минимума невязки вычисляется из равенства нулю 1-й производной:

$$\frac{d \|R^{j+1}\|^2}{d\theta} = -2(AR^j, R^j) + 2\theta \|AR^j\|^2 = 0,$$

откуда находится искомый параметр $\theta = \frac{(AR^j, R^j)}{\|AR^j\|^2}$, который используется в (13) для вычисления следующего приближения и обеспечивает минимум функционала $\|R^{j+1}\|^2$, т.к. 2-я производ-

ная положительна $\frac{d^2 \|R^{j+1}\|^2}{d\theta^2} = 2 \|AR^j\|^2 > 0$, если $AR^j \neq 0$.

Итерации прекращаются при выполнении критерия (6).

Подстановка значения θ в (17) дает выражение

$$\begin{aligned} \|R^{j+1}\|^2 &= \|R^j\|^2 - 2\theta(AR^j, R^j) + \theta^2 \|AR^j\|^2 = \\ &= \|R^j\|^2 - 2 \frac{(AR^j, R^j)}{\|AR^j\|^2} (AR^j, R^j) + \left[\frac{(AR^j, R^j)}{\|AR^j\|^2} \right]^2 \|AR^j\|^2 = \\ &= \|R^j\|^2 - \frac{(AR^j, R^j)^2}{\|AR^j\|^2}, \end{aligned}$$

из которого следует убывание невязки, т.е. сходимость итераций

$\|R^{j+1}\|^2 < \|R^j\|^2$, если $(AR^j, R^j)^2 \neq 0$, и несходимость алгоритма

$\|R^{j+1}\|^2 = \|R^j\|^2$, если $(AR^j, R^j)^2 = 0$.

На первый взгляд может показаться, что метод *Красносельского-Крейна* обладает универсальностью, т.е. пригоден для решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей A , т.к. для сходимости итераций $\|R^{j+1}\|^2 < \|R^j\|^2$ требуется лишь выполнение $(AR^j, R^j)^2 \neq 0$.

Теорема 3. Для сходимости метода *Красносельского-Крейна* достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством диагонального преобладания

$$\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \leq |a_{ii}|, i = 1, \dots, n$$

Теорема 4. Для сходимости метода *Красносельского-Крейна* достаточно, чтобы матрица в (3) была симметрической $a_{ik} = a_{ki}, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$.

Теорема 5. Метод минимальных невязок не сходится для несимметрической матрицы $A = [a_{ik}]$, не обладающей свойством диагонального преобладания.

Очевидно, в силу теоремы 4 решение разрешимой системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, i = 1, \dots, n,$$

не обладающих свойствами диагонального преобладания или симметричности, можно найти методом *Красносельского-Крейна*, предварительно симметризовав ее путем умножения на транспонированную матрицу $A^* = [a_{ik}^* = a_{ki}]$:

$$A^* Ax = A^* b,$$

где матрица $C = A^* A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей. Методом минимальных невязок решается уравнение $Cx = d, d = A^* b, C = [c_{ms}], d = [d_m]$,

$$c_{ms} = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* a_{ks} = \sum_{k=1}^n a_{km} a_{ks}, d_m = \sum_{k=1}^n a_{mk}^* b_k = \sum_{k=1}^n a_{km} b_k,$$

$$R^j = (d - CR^j), \theta = \frac{(CR^j, R^j)}{\|CR^j\|^2}, x^{j+1} = x^j + \theta R^j, j = 0, 1, \dots, j^*$$

§6. Вычисление корней уравнения. Метод простой итерации.

Метод половинного деления. Метод Ньютона. Метод хорд
Численному нахождению корней уравнения

$$f(z) = 0 \quad (1)$$

должно быть предпослано исследование вопросов существования и положения искомых корней в конкретном интервале. Здесь широко используются теоретические предпосылки высшей алгебры. Пусть по теории или из иных соображений корень уравнения (1) находится в интервале $z \in [b, c]$. Очевидно, должно выполняться неравенство $f(b)f(c) < 0$, иначе в этом интервале нет корней. За исключением простейших уравнений корень находится численными итерационными методами.

Метод простой итерации. Первоначально уравнение (1) приводится к виду

$$z = \varphi(z) \quad (2)$$

Выбирая некоторое начальное приближение $j = 0, z^0 = b$, вычисляют последовательные приближения по алгоритму

$$z^{j+1} = \varphi(z^j), j = 0, 1, 2, \dots, j^* \quad (3)$$

Вычисления (3) прекращаются при выполнении вполне понятного критерия

$$z^{j^*} - \varphi(z^{j^*}) \approx 0, \quad (4)$$

или используется следующий критерий

$$\frac{|z^{j^*} - z^{j^*-1}|}{|z^{j^*}|} \leq \varepsilon, \varepsilon \approx 0 \quad (5)$$

Последнее приближение z^{j^*} берется в качестве корня уравнения $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$.

Метод половинного деления. Интервал $[b, c]$ делится на два интервала $[b, (c+b)/2], [(c+b)/2, c]$, после чего проверяются условия существования корня (1): $f(b)f((c+b)/2) < 0$, $f(c)f((c+b)/2) < 0$. Если выполнено $f(b)f((c+b)/2) < 0$, то делится пополам соответствующий интервал $[b, (c+b)/2]$ и проверяется условие $f((b+(c+b)/2)/2)f((c+b)/2) < 0$,

если в другом интервале, то проверяется условие $f((c + (c + b)/2)/2)f((c + b)/2) < 0$ и т.д. Данный алгоритм продолжается до выполнения соотношения $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$.

Метод Ньютона (метод касательных). В этом методе используется производная и алгоритм вычислений

$$z^{j+1} = z^j - \frac{f(z^j)}{f'(z^j)}, j = 0, 1, 2, \dots, j^*$$

Итерации продолжаются до выполнения $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$.

Метод хорд. В этом методе требуются два начальных приближения $j=0, z^0=b, j=1, z^1=c$. Последующие итерации вычисляются по алгоритму

$$z^{j+1} = z^j - \frac{z^j - z^{j-1}}{f(z^j) - f(z^{j-1})} f(z^j), j = 1, 2, \dots, j^*$$

Итерации прекращаются при выполнении $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$ или же *применяется критерий (5)*.

Вопросы:

1. Применить метод исключения Гаусса для системы $n=3$.
2. Чем отличается метод Якоби от метода Зейделя?
3. Найти корень уравнения $15,132x^5 - 0,67x^4 + 9,34x^3 - x + 1 = 0$ в интервале $[-1, 0]$. Положить $\varepsilon = 10^{-5}$. Сравнить между собой число итераций j^* в методе простой итерации, в методе половинного деления, в методе Ньютона и в методе хорд.
4. Написать в индексном виде выражение $\theta = (AR^j, R^j) / \|AR^j\|^2$.
5. Для каких систем сходится метод минимальных невязок?

Модуль-2 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

§1. Сетки и сеточные функции

В методе сеток для аппроксимации какого-либо дифференциального уравнения соответствующей разностной схемой область

непрерывного изменения аргументов необходимо заменить сеточной областью, в которой уже аргументы изменяются дискретно. Пусть пространственные независимые переменные $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_M)$, где $M \geq 1$ - размерность пространства, изменяются в области $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_m \leq a_m, m = \overline{1, M}\}$; время $t \in [0, \bar{t}]$. Прямоугольные сетки вводятся следующим образом:

$$\bar{\Omega}_h = \{x_{mi_m}, i_m = 0, 1, 2, \dots, N_m; x_{m_0} = 0, x_{mN_m} = a_m; m = \overline{1, M}\},$$

$$\bar{\Omega}_\tau = \{t_n, n = 0, 1, \dots, N_\tau; t_0 = 0, t_{N_\tau} = \bar{t}\}.$$

Соответственно сеточные подобласти:

$$\Omega_h = \{x_{mi_m}, i_m = \overline{1, N_{m-1}}, m = \overline{1, M}\},$$

$$\Omega_{\tau_0} = \{t_n, n = 0, \dots, N_\tau - 1\}, \quad \Omega_{\tau_1} = \{t_n, n = \overline{1, N_\tau}\}.$$

Здесь S_h - множество граничных узлов сетки Ω_h , которым соответствуют индексы

$$i_m = 0, i_m = N_m, 0 \leq i_k \leq N_k, k = \overline{1, n}, k \neq m, m = \overline{1, M};$$

S_{mh} - узлы S_h , которым соответствуют индексы

$$i_m = 0, 1 \leq i_k \leq N_k - 1, k = \overline{1, M}, k \neq m, m = \overline{1, M};$$

\bar{S}_{mh} - узлы S_h , имеющие индексы

$$i_m = N_m, 1 \leq i_k \leq N_k - 1, k = \overline{1, M}, k \neq m, m = \overline{1, M};$$

$$\Omega'_{hm} = \Omega_h US_{mh}, \quad \Omega''_{hm} = \Omega_h \bar{S}_{mh}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Отрезки $h_{mi_m} = x_{mi_m} - x_{mi_m-1} > 0, i_m = \overline{1, N_m}, h_{mi_m} = 0,5(h_{mi_m} + h_{mi_m+1})$

есть шаги сетки $\bar{\Omega}_h$ - по оси x_m , для равномерных шагов

$$h_{mi_m} = a_m / N_m = h_m, i_m = \overline{1, N_m}; \quad \tau_n = t_n - t_{n-1} > 0, n = \overline{1, N_\tau},$$

- шаги сетки $\bar{\Omega}_\tau$ на отрезке времени $[0, \bar{t}]$. Сетка $\bar{\Omega}_h$ называется

равномерной, если она равномерно по всем осям $x_m, m = \overline{1, M}$.

Функция $f = \{f(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}, t_n), (x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}) \in \bar{\Omega}_h, t_n \in \bar{\Omega}_\tau\}$ является сеточной функцией заданной на сетке $\bar{\Omega}_h \times \bar{\Omega}_\tau$, если она опреде-

лена в каждом узле $(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}, t_n) \equiv (x, t) \in \overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$. Для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$, применяются обозначения: индексные $f(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}, t_n) \equiv f_{i_1 \dots i_M}^n$, чаще безындексные $f(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}, t_n) \equiv f(x, t) \equiv f^n(x)$,

$$x = (x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}) \in \overline{\Omega}_h, \quad t = t_n.$$

Для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\Omega}_h$, $f = \{f(x), x \in \overline{\Omega}_h\}$ применяются обозначения $f(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}) \equiv f_{i_1 \dots i_M} \equiv f(x)$, $x = (x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}) \in \overline{\Omega}_h$.

Уравнения гидродинамики компактно записываются в векторном виде, поэтому имеет смысл ввести понятие векторной сеточной функции $\vec{f} = \sum_{m=1}^M f_m \vec{i}_m$, где \vec{i}_m - орты осей x_m , f_m , $m = \overline{1, M}$ - компоненты вектора \vec{f} , заданные на $\overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$ сеточные функции $f_m = \{f_m(x, t), x \in \overline{\Omega}_h\}$, $m = \overline{1, M}$, $t \in \overline{\Omega}_\tau$. Для векторных сеточных функций также применяются индексные - $\vec{f} = \vec{f}(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}, t_n) \equiv \vec{f}_{i_1 \dots i_M}^n$ - и безындексные $\vec{f}_{i_1 \dots i_M}^n \equiv \vec{f}^n$ - обозначения. Векторные сеточные функции могут задаваться только на сетке $\overline{\Omega}_h$. В этом случае удобны обозначения

$$\vec{f}(x_{1i_1}, \dots, x_{Mi_M}) \equiv \vec{f}_{i_1 \dots i_M} \equiv \vec{f}(x) = \sum_{m=1}^M f(x) \vec{i}_m, \quad x \in \overline{\Omega}_h.$$

Сетки и сеточные функции в областях, составленных из M -мерных параллелепипедов ($M = 2$ - прямоугольников) типа $\overline{\Omega}$ и имеющие общие грани (стороны при $M=2$), вводятся аналогичным образом.

§ 2. Элементарные разностные операторы

Разностные соотношения, получающиеся при аппроксимации дифференциальных выражений, удобно представлять в виде действия линейных разностных операторов на сеточную функцию, подобно тому, как дифференциальные операторы действу-

ют на функцию непрерывного аргумента. Всякий разностный оператор может быть сконструирован из элементарных разностных операторов, которыми являются *тождественный или единичный оператор* E , *операторы сдвига*: T_m - в положительном и T_{-m} - в отрицательном направлениях оси x_m , $m = \overline{1, M}$. Тождественный (единичный) оператор E действует на сеточную функцию так, что $(Ef^n)_{i_1 \dots i_M} = f^n_{i_1 \dots i_M}$ или $(Ef)_{i_1 \dots i_M} = f_{i_1 \dots i_M}$, поэтому $(Ef^n)_{i_1 \dots i_M} \equiv Ef^n \equiv f^n$, $(Ef)_{i_1 \dots i_M} \equiv Ef \equiv f$.

При $M=1$ единичный оператор E является квадратной матрицей порядка $(N_x - 1)(N_x - 1)$, элементы главной диагонали которой равны 1, и имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix},$$

Операторы сдвига вперед T_{+m} , $m = \overline{1, M}$ определяются так:

$$(T_{+m}f^n)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv f^n_{i_1 \dots i_m + 1 \dots i_M} = f(x_{1i_1}, \dots, x_{mi_m} + h_{mi_m}, \dots, x_{Mi_M}, t_n)$$

Оператор T_{+1} при $M=1$ является квадратной матрицей порядка $(N_x - 1)(N_x - 1)$, над главной диагональю которой стоят 1.

$$T_{+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Операторы сдвига назад $T_{-m}, m = \overline{1, M}$ определяются так:

$$(T_{-m}f^n)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv f^n_{i_1 \dots i_m - 1 \dots i_M} = f(x_{i_1}, \dots, x_{m_{i_m}} - h_{m_{i_m}}, \dots, x_{M_{i_M}}, t_n)$$

Оператор T_{-1} при $M=1$ также является квадратной матрицей порядка $(N_x - 1)(N_x - 1)$, но 1 стоят под главной диагональю,

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходя из этих определений записывают, опуская индексы:

$$(T_{+m}f)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv T_{+m}f, \quad (T_{-m}f)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv T_{-m}f, \quad m = \overline{1, M}.$$

В разностных схемах наиболее часто применяются одномерные операторы, т.е. операторы, действующие только в одном из направлений x_m : операторы образования разности вперед -

$\Delta_{+m} = T_{+m} - E, m = \overline{1, M}$. Оператор $\Delta_{+1} = T_{+1} - E$ при $M=1$ является квадратной матрицей порядка $(N_x - 1)(N_x - 1)$

и имеет вид:

$$\Delta_{+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots -1 \end{pmatrix}$$

Операторы образования разности назад - $\Delta_{-m} = E - T_{-m}, m = \overline{1, M}$; оператор $\Delta_{-1} = E - T_{-1}$ при $M=1$ является квадратной матрицей порядка $(N_x - 1)(N_x - 1)$ и имеет вид:

$$\Delta_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Операторы центральной разности: $\delta_m = (T_m - T_{-m})$, $m = \overline{1, M}$;
операторы симметричной разности:

$$\Lambda_m = \Delta_m \Delta_{-m} = T_m - 2E + T_{-m}, \quad m = \overline{1, M}$$

Действия этих операторов в точке $x = (x_{1i_1}, \dots, x_{mi_m}, \dots, x_{Mi_M})$ на любую сеточную функцию $f = \{f(x), x \in \overline{\Omega}_h\}$ образуют разности значений сеточной функции в соседних узлах, расположенных на оси x_m . В одномерном случае $M = 1$ будет $m = 1$, следовательно,

$$(\Delta_1 f)_{i_1} = f_{i_1+1} - f_{i_1}, \quad (\Delta_{-1} f)_{i_1} = f_{i_1} - f_{i_1-1}, \quad (\delta_1 f)_{i_1} = f_{i_1+1} - f_{i_1-1}.$$

В двумерном случае $M=2$ значения $m = 1, 2$, тогда

$$(\Delta_2 f)_{i_1 i_2} = f_{i_1 i_2+1} - f_{i_1 i_2}, \quad (\Delta_{-2} f)_{i_1 i_2} = f_{i_1 i_2} - f_{i_1 i_2-1}$$

В трехмерном случае $M=3$ значения $m = 1, 2, 3$ и

$$(\Delta_3 f)_{i_1 i_2 i_3} = f_{i_1 i_2 i_3+1} - f_{i_1 i_2 i_3}, \quad (\Delta_{-3} f)_{i_1 i_2 i_3} = f_{i_1 i_2 i_3} - f_{i_1 i_2 i_3-1}$$

В дальнейшем используются операторы и их обозначения из этого параграфа; нижние индексы опускаются

$$(\Delta_m f)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv \Delta_m f, \quad (\Delta_{-m} f)_{i_1 \dots i_m \dots i_M} \equiv \Delta_{-m} f, \quad m = \overline{1, M}.$$

§ 3. Методы построения схем. Интегро-интерполяционный метод баланса в ячейке. Аппроксимация Аллена-Саусвелла 1⁰. Метод разложений в ряды Тейлора.

Универсальным методом построения разностных схем является разложение значений сеточной функции в ряд Тейлора в окрестности центрального узла $x = (x_{1i_1}, \dots, x_{mi_m}, \dots, x_{Mi_M})$, $t = t_n$.

Приведем ряд примеров. Для производной $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t}$ применяются следующее разложение в ряд *Тейлора*:

$$\mathfrak{R}^{n-1} = \mathfrak{R}^n - \tau_n \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n + O(\tau_n^2),$$

откуда получается схема $\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n \approx \frac{\mathfrak{R}^n - \mathfrak{R}^{n-1}}{\tau_n}$, имеющая погрешность $O(\tau_n)$.

$$\text{Из другого ряда Тейлора } \mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^n + \tau_{n+1} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n + O(\tau_{n+1}^2),$$

следует схема $\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n \approx \frac{\mathfrak{R}^{n+1} - \mathfrak{R}^n}{\tau_{n+1}}$ с погрешностью $O(\tau_{n+1})$.

Из разложений в ряды *Тейлора* с удержанием 2-х производных

$$\mathfrak{R}^{n-1} = \mathfrak{R}^n - \tau_n \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau_n^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial t^2} \right)^n + O(\tau_n^3),$$

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^n + \tau_{n+1} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau_{n+1}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial t^2} \right)^n + O(\tau_{n+1}^3),$$

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^3),$$

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau_{n+1}}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^3),$$

несложными выкладками выводятся разностные соотношения

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^n = \frac{\mathfrak{R}^{n+1} - \mathfrak{R}^{n-1}}{\tau_n + \tau_{n+1}} + O(\tau_{n+1} - \tau_n) + O(\tau_n^2) + O(\tau_{n+1}^2),$$

$$\frac{\mathfrak{R}^{n+1} - \mathfrak{R}^n}{\tau_{n+1}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^2), \quad \frac{\mathfrak{R}^{n+1} + \mathfrak{R}^n}{2} = \mathfrak{R}^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^2)$$

Вводятся обозначения разностных производных по времени

$$\frac{\mathfrak{R}^n - \mathfrak{R}^{n-1}}{\tau_n} \equiv \mathfrak{R}_i^n, \quad \frac{\mathfrak{R}^{n+1} - \mathfrak{R}^n}{\tau_{n+1}} \equiv \mathfrak{R}_t^n \equiv \mathfrak{R}_i^{n+1}.$$

Из разложений в ряды *Тейлора* по пространственным переменным

$$T_{+m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} + h_{mi_m+1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m+1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} + \frac{h_{mi_m+1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial x_m^3} + O(h_{mi_m+1}^4),$$

$$T_{-m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} - h_{mi_m} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m}^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} - \frac{h_{mi_m}^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial x_m^3} + O(h_{mi_m}^4),$$

исключением 1-ой производной получается аппроксимация

$$\left(\frac{\partial^S \mathfrak{R}}{\partial x_m^S} \right)_{i_m} \approx \frac{2}{h_{mi_m+1} + h_{mi_m}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{i_m+1}^n - \mathfrak{R}_{i_m}^n}{h_{mi_m+1}} - \frac{\mathfrak{R}_{i_m}^n - \mathfrak{R}_{i_m-1}^n}{h_{mi_m}} \right)$$

с погрешностью $O(h_{mi_m+1} - h_{mi_m}) + O(\hbar_m^2)$, которая на равномерной сетке $h_{mi_m} = h_{mi_m+1} = h_m$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} \right)^n = \frac{\mathfrak{R}_{i_m-1}^n - 2\mathfrak{R}_{i_m}^n + \mathfrak{R}_{i_m+1}^n}{h_m^2} + O(\hbar_m^2).$$

Из более коротких разложений в ряды *Тейлора*

$$T_{+m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} + h_{mi_m+1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m+1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} + O(h_{mi_m+1}^3),$$

$$T_{-m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} - h_{mi_m} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m}^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} + O(h_{mi_m}^3),$$

получается аппроксимация 1-ой производной центральной разностью

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} \right)_{i_m} \approx \frac{\mathfrak{R}_{i_m+1}^n - \mathfrak{R}_{i_m-1}^n}{h_{mi_m+1} + h_{mi_m}}$$

с погрешностью $O(h_{mi_m+1} - h_{mi_m}) + O(\hbar_m^2)$.

Из простых разложений

$$T_{+m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} + h_{mi_m+1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + O(h_{mi_m+1}^2),$$

$$T_{-m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} - h_{mi_m} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} + O(h_{mi_m}^2),$$

получаются односторонние аппроксимации

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} \right)_{i_m} = \frac{\mathfrak{R}_{i_m+1}^n - \mathfrak{R}_{i_m}^n}{h_{mi_m+1}} + O(h_{mi_m+1}),$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} \right)_{i_m} = \frac{\mathfrak{R}_{i_m}^n - \mathfrak{R}_{i_m-1}^n}{h_{mi_m}} + O(h_{mi_m}) \text{ и т.д.}$$

2⁰. Интегро-интерполяционный метод баланса в ячейке. Аппроксимация Аллена-Саусвелла.

Идея этого метода демонстрируется на уравнении Бюргерса с переменными коэффициентами

$$v(y) \frac{d}{dy} [k(y) \cdot \frac{d\Phi}{dy}] - V(y) \frac{d\Phi}{dy} = f(y), \quad (1)$$

которое очевидным образом при $v(y) \equiv 1, V(y) \equiv 0, \forall y$ и $v(y) \equiv 1, k(y) \equiv 1, V(y) \equiv 0, \forall y$ переходит соответственно в одномерные уравнения теплопроводности:

$$\frac{d}{dy} [k(y) \cdot \frac{d\Phi}{dy}] = f(y), \quad \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = f(y)$$

Пусть на оси y введена неравномерная сетка $y_i, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h_i = y_i - y_{i-1} > 0, \tilde{h}_i = 0.5 \cdot (h_i + h_{i+1}); \Phi(y_i) = \Phi_i$
Обозначаются, ради краткости

$$\mu = k \exp\left(-\int_{y^0}^y \frac{V}{k v} dy\right), \quad F = f \cdot v^{-1} \exp\left(-\int_{y^0}^y \frac{V}{k v} dy\right)$$

Уравнение (42) записывается в эквивалентном виде

$$v \exp\left(\int_{y^0}^y \frac{V}{k v} dy\right) \cdot \frac{d}{dx} \left[k \exp\left(-\int_{y^0}^y \frac{V}{k v} dy\right) \frac{d\Phi}{dy} \right] = f \quad (2)$$

где y^0 – произвольная фиксированная точка оси y . С учетом обозначений уравнение (2) запишется короче

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{d\Phi}{dy} \right) = F \quad (3)$$

Уравнение (3) интегрируется на отрезках $[y_{i-\frac{1}{2}}, y_i]$, $[y_i, y_{i+\frac{1}{2}}]$,

$$y_{i-\frac{1}{2}} = y_i - h_i / 2, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + h_{i+1} / 2:$$

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \mu_i \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_i = \int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} F dy \quad (4)$$

$$\mu_i \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_i - \mu_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i-\frac{1}{2}} = \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} F dy \quad (5)$$

Сумма (4) с (5) дает

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \mu_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i-\frac{1}{2}} = \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} F dy \quad (6)$$

Для функции $\Phi \in C^4(-\infty, \infty)$ имеют место формулы, вытекающие из разложений в ряды *Тейлора*:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}^2}{24} \cdot \frac{d^3\Phi(\xi_1)}{dy^3}, \quad \xi_1 \in [y_i, y_{i+\frac{1}{2}}], \quad (7)$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i^2}{24} \cdot \frac{d^3\Phi(\xi_2)}{dy^3}, \quad \xi_2 \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i] \quad (8)$$

По теореме о среднем интеграла получается

$$\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} F dy = \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{f}{v} \exp\left(-\int_{y^0}^y \frac{V}{kv} \cdot dy\right) dy = - \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{fk}{V} d \exp\left(-\int_{y^0}^y \frac{V}{kv} \cdot dy\right) = \quad (9)$$

$$= -\frac{f(\eta)k(\eta)}{V(\eta)} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} d \exp\left(-\int_{y_0}^y \frac{V}{kv} \cdot dy\right) = -\frac{f(\eta)k(\eta)}{V(\eta)} * \\ * \left[\exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) - \exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) \right],$$

где $\eta \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}]$. Теорема Лагранжа осуществляет связь

где $\xi' \in [y_i, \eta]$, если $\eta \geq y_i$, если $\eta < y_i$, то $\xi' \in [\eta, y_i]$, т.е.

$$|\eta - y_i| \leq \max\left\{\frac{h_i}{2}, \frac{h_{i+1}}{2}\right\} \leq ch_i$$

на равномерной сетке $h_{i+1}=h_i=h$ имеет место $|\eta - y_i| \leq \frac{h}{2}$.

На основании (6), (7), (8), (9), (10) найдем

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i-1}} - \mu_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} - \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}} h_{i+1}^2}{24} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_i)}{dy^3} + \mu_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2}{24} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_2)}{dy^3} = \\ = \left[\frac{fk_i}{V_i} + (\eta - y_i) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{f(\xi')k(\xi')}{V(\xi')} \right) \right] \cdot \left[\exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) - \exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) \right]$$

Обозначив

$$Q_1 = \exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right), \quad Q_2 = \exp\left(-\int_{y_0}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right), \quad (10)$$

преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{V_i}{k_i} \cdot \frac{Q_1 k_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - Q_2 k_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{Q_2 - Q_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= f_i + \frac{V_i}{k_i}(\eta - y_i) \left[f(\xi') \frac{d}{dy} \left(\frac{k(\xi')}{V(\xi')} \right) + \frac{k(\xi')}{V(\xi')} \cdot \frac{df(\xi')}{dy} \right] + \quad (11) \\
&+ \frac{\frac{V_i}{k_i} \left[\frac{h_{i+1}^2}{24} \cdot \mu_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_1)}{dy^3} - \frac{h_i^2 \mu_{i-\frac{1}{2}}}{24} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_3)}{dy^3} \right]}{(Q_2 - Q_1)}
\end{aligned}$$

Отбросив в (11) погрешности

$$\begin{aligned}
&\frac{V_i}{k_i}(\eta - y_i) \left[f(\xi') \frac{d}{dy} \left(\frac{k(\xi')}{V(\xi')} \right) + \frac{k(\xi')}{V(\xi')} \cdot \frac{df(\xi')}{dy} \right] + \quad (12) \\
&+ \frac{\frac{V_i}{k_i} \left[\frac{h_{i+1}^2}{24} \cdot \mu_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_1)}{dy^3} - \frac{h_i^2 \mu_{i-\frac{1}{2}}}{24} \cdot \frac{d^3 \Phi(\xi_3)}{dy^3} \right]}{(Q_2 - Q_1)},
\end{aligned}$$

получаем аппроксимацию левой части уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned}
&\left[v(y) \frac{d}{dy} [k(y) \cdot \frac{d\Phi}{dy}] - V(y) \frac{d\Phi}{dy} \right] \approx \\
&\approx \frac{V_i}{k_i} \cdot \frac{Q_1 k_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - Q_2 k_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{Q_2 - Q_1} \quad (13)
\end{aligned}$$

Анализ погрешности (12) показывает, что разностное соотношение аппроксимирует дифференциальный оператор в левой части (1) в классе достаточно гладких функций с локальной погрешностью $O((\eta - y_i) + \tilde{h}_i^2)$ и имеет так называемую «аппроксимационную вязкость», входящую в квадратную скобку в правой части (12). Сокращая в (13) числитель и знаменатель на

$\exp\left(-\int_{y_0}^{y_i} \frac{V}{kV} dy\right)$, получаем аппроксимацию Аллена-Саусвелла:

$$\frac{V_i}{k_i} \frac{k_{i+\frac{1}{2}} \exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) \cdot \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - k_{i-\frac{1}{2}} \exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) \cdot \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{\exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) - \exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right)} = f_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

Если не удастся точно вычислить интеграл, стоящий в показателе степени экспоненты, применяются приближенные формулы левого или правого прямоугольников:

$$\exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) = \exp\left(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i v_i}\right) \cdot \exp\left[O(h_{i+1}^2)\right],$$

$$\exp\left(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}} \frac{V}{kv} dy\right) = \exp\left(\frac{h_i V_i}{2k_i v_i}\right) \cdot \exp\left[O(h_i^2)\right],$$

где $O(h_{i+1}^2) = -\frac{h_{i+1}^2}{8} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{V(\xi_1)}{k(\xi_1)v(\xi_1)} \right), \quad \xi_1 \in [y_i, y_{i+\frac{1}{2}}],$

$$O(h_i^2) = \frac{h_i^2}{8} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{V(\xi_2)}{k(\xi_2)v(\xi_2)} \right), \quad \xi_2 \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i].$$

После отбрасывания погрешностей схема принимает вид

$$\frac{V_i}{k_i} \frac{k_{i+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i v_i}\right) \cdot \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - k_{i-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{h_i V_i}{2k_i v_i}\right) \cdot \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{\exp\left(\frac{h_i V_i}{2k_i v_i}\right) - \exp\left(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i v_i}\right)} = f_i \quad (14)$$

На равномерной сетке $h_{i+1} = h_i = h$ для $k(y) = 1, v(y) = v = \text{const}, V(y) = V = \text{const}$ аппроксимация Аллена-Саусвелла такова:

$$\frac{V}{h} \cdot \frac{e^{-\frac{Vh}{lv}} (U_{i+1} - U_i) - e^{\frac{Vh}{lv}} (U_i - U_{i-1})}{e^{\frac{Vh}{lv}} - e^{-\frac{Vh}{lv}}} = f_i, \quad (15)$$

Для $v(y) \equiv 1, V(y) \equiv 0, \forall y$ из (14) после раскрытия неопределенности $0/0$ по правилу *Лопиталья* вытекает аппроксимация

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{d\Phi}{dy} \right)_i \approx \frac{k_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{0.5(h_{i+1} + h_i)}, \quad (16)$$

Заменяя в (16) $k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k_{i+1} + k_i}{2} + O(h_{i+1}^2), k_{i-\frac{1}{2}} = \frac{k_i + k_{i-1}}{2} + O(h_i^2)$,

получаем аппроксимацию

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \cdot \frac{d\Phi}{dy} \right)_i \approx \frac{2}{(h_{i+1} + h_i)} \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{2} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - \frac{k_i + k_{i-1}}{2} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} \right),$$

которая справедлива и в случае разрывного коэффициента $k(y)$, имеет погрешность $O(h_{i+1} - h_i) + O(h_i^2)$. Для $k(y) \equiv 1, \forall y$ из (16) вытекает аппроксимация 2-ой производной на неравномерной сетке

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}_i \approx \frac{2}{(h_{i+1} + h_i)} \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_{i+1}} - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} \right),$$

на равномерной сетке она имеет симметричный вид

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}_i \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2} \quad \text{и погрешность } O(h^2).$$

§4. Разностные конвективные члены с «аппроксимационной вязкостью». Аппроксимация Булеева-Петрищева

В уравнения динамики жидкостей и газов входят члены конвективного переноса:

$$V_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_1} + \dots + V_m \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_m} + \dots + V_M \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_M} \equiv \sum_{k=1}^M V_k \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_k}.$$

Аппроксимации входящих сюда производных $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_m}, m = \overline{1, M}$, на

основании *вышеизложенного* осуществляются различными способами. Отсюда вытекает многообразие разностных схем для уравнений *Эйлера, Навье* и других уравнений математической

физики. Все аппроксимации проводятся в центральном узле $x = (x_{1_{i_1}}, \dots, x_{m_{i_m}}, \dots, x_{M_{i_M}})$.

1⁰. Аппроксимация разностью вперед на двухточечном шаблоне $[x_{m_{i_m}}, x_{m_{i_m+1}}]$:

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \frac{\Delta_{+m} \mathfrak{R}^n}{h_{m_{i_m+1}}} + O(h_{m_{i_m+1}}) = V_m^n \mathfrak{R}_{x_m}^n + O(h_{m_{i_m+1}}), m = \overline{1, M},$$

где $\frac{\Delta_{+m} f^n}{h_{m_{i_m+1}}} \equiv f_{x_m}^n$ - разностная производная вперед. Здесь член

$$O(h_{m_{i_m+1}}) = -\frac{1}{2} h_{m_{i_m+1}} V_m^n \frac{\partial^2 \mathfrak{R}^n}{\partial x_m^2}$$
 образует «аппроксимационную

вязкость» в аппроксимациях уравнений динамики вязких жидкостей.

2⁰. Аппроксимация на двухточечном шаблоне $[x_{m_{i_m-1}}, x_{m_{i_m}}]$ разностью назад:

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \frac{\Delta_{-m} \mathfrak{R}^n}{h_{m_{i_m}}} + O(h_{m_{i_m}}) = V_m^n \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + O(h_{m_{i_m}}), m = \overline{1, M},$$

где $\frac{\Delta_{-m} f^n}{h_{m_{i_m}}} \equiv f_{\bar{x}_m}^n$ - разностная производная назад. Здесь

$$O(h_{m_{i_m}}) = \frac{1}{2} h_{m_{i_m}} V_m^n \frac{\partial^2 \mathfrak{R}^n}{\partial x_m^2}$$
 тоже образует «аппроксимационную

вязкость». Очевидно, применение таких схем аппроксимаций целесообразно в тех задачах, где истинная кинематическая вязкость жидкости (газа) есть большая величина: $v > h_{m_{i_m}} |V_m^j| / 2$, или $v > h_{m_{i_m+1}} |V_m^j| / 2$, т.е.

сеточное число Рейнольдса меньше двух: $Re_h = \frac{h}{v} |V_m^j| < 2$.

3⁰. Построенная на основе **1⁰** и **2⁰** аппроксимация Булева-Петрищева с направленными по знаку компоненты скорости разностями (другое название – разности против потока)

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = \frac{|V_m^n| + V_m^n}{2} \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \mathfrak{R}_{x_m}^n + O(h_{mi_m}) + O(h_{mi_m+1}), m = \overline{1, M}$$

также имеет «аппроксимационную вязкость».

§ 5. Разностные конвективные члены без «аппроксимационной вязкости». Аппроксимация Джакупова
1⁰. Аппроксимация на трехточечном шаблоне

$[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$:

$$\begin{aligned} \left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n &= V_m^n \left[\frac{\delta_m \mathfrak{R}^n}{2\hbar_{mi_m}} - \frac{h_{mi_m+1} - h_{mi_m}}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}_{x_m}^n - \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} \right) \right] + O(\hbar_{mi_m}^2) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + O(\hbar_{mi_m}^2), \hbar_{mi_m} = 0,5(h_{mi_m+1} + h_{mi_m}), m = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

где $\frac{\delta_m f^n}{2\hbar_{mi_m}} - \frac{h_{mi_m+1} - h_{mi_m}}{2} \left(\frac{f_{x_m}^n - f_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} \right) \equiv \bar{f}_{\bar{x}_m}^n$ - **центральная**

разностная производная. Она не содержит «аппроксимационную вязкость», но не рекомендуется для аппроксимаций конвективных членов, т.к. при больших числах Рейнольдса приводит к пилообразным решениям, дает неправильный результат.

2⁰. Разностная производная $\bar{f}_{\dot{x}_m}^n, m = \overline{1, M}$ вводится так:

$$\bar{f}_{\dot{x}_m}^n \equiv \frac{\Delta_{-m} \bar{f}^n}{\hbar_{mi_m}} \equiv \frac{\bar{f}^n - T_{-m} \bar{f}^n}{\hbar_{mi_m}}, m = \overline{1, M}. \quad \text{Предназначена для}$$

кратких записей аппроксимации вторых производных. В частности, в аппроксимации предыдущего пункта, взяв $\bar{f}^n = f_{x_m}^n$,

можно записать, что

$$\frac{f_{x_m}^n - f_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} = \frac{\Delta_{-m}(f_{x_m}^n)}{\hbar_{mi_m}} = (f_{x_m}^n)_{\dot{x}_m} = f_{x_m \dot{x}_m}^n, T_{-m}(f_{x_m}^n) = f_{\bar{x}_m}^n$$

3⁰. Аппроксимация на трехточечном шаблоне

$[x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, x_{mi_m+2}]$:

$$\begin{aligned} (V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m})_{i_m}^n &= V_m^n [\mathfrak{R}_{x_m}^n - 0,5h_{m_{i_m+1}} T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n)] + O(\hbar_m^2) = \\ &= V_m^n \mathfrak{R}_{x_m}^n + O(\hbar_m^2), \quad m = \overline{1, M}, \quad \hbar_m = \max_{i_m} h_{m_{i_m}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_{x_m}^n - 0,5h_{m_{i_m+1}} T_{+m} f_{x_m \dot{x}_m}^n \equiv f_{x_m}^n$ — трехточечная разностная производная вперед. Данная аппроксимация **не содержит «аппроксимационную вязкость»**, имеет 2-й порядок точности и предназначена для использования при больших числах Рейнольдса только в тех узлах с индексами $1 \leq i_m \leq N_m - 2$, в которых $V_m^n \leq 0$. Здесь

$$T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) = \frac{2}{h_{m_{i_m+2}} + h_{m_{i_m+1}}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{i_m+2}^n - \mathfrak{R}_{i_m+1}^n}{h_{m_{i_m+2}}} - \frac{\mathfrak{R}_{i_m+1}^n - \mathfrak{R}_{i_m}^n}{h_{m_{i_m+1}}} \right).$$

(Поскольку все индексы, кроме i_m , не меняются, они опущены).

4⁰. Аппроксимация на трехточечном шаблоне $[x_{m_{i_m-2}}, x_{m_{i_m-1}}, x_{m_{i_m}}]$:

$$(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m})_{i_m}^n = V_m^n [\mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + 0,5h_{m_{i_m}} T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n)] + O(\hbar_m^2) = V_m^n \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + O(\hbar_m^2), \quad (2)$$

где $f_{\bar{x}_m}^n + 0,5h_{m_{i_m}} T_{-m}(f_{x_m \dot{x}_m}^n) \equiv f_{\bar{x}_m}^n$ — трехточечная разностная производная назад. Аппроксимация **не содержит «аппроксимационную вязкость»**, имеет 2-й порядок точности и предназначена для использования при больших числах Рейнольдса только в тех узлах с индексами $2 \leq i_m \leq N_m - 1$, в которых $V_m^n \geq 0$.

$$\text{Здесь } T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) = \frac{2}{h_{m_{i_m}} + h_{m_{i_m-1}}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{i_m}^n - \mathfrak{R}_{i_m-1}^n}{h_{m_{i_m}}} - \frac{\mathfrak{R}_{i_m-1}^n - \mathfrak{R}_{i_m-2}^n}{h_{m_{i_m-1}}} \right).$$

5⁰. Аппроксимация на четырехточечном шаблоне $[x_{m_{i_m-1}}, x_{m_{i_m}}, x_{m_{i_m+1}}, x_{m_{i_m+2}}]$.

Если в приграничном узле $i_m = 1$ и $V_m^n \leq 0$, то применяется аппроксимация 3^0 . Если же в этом узле $V_m^n \geq 0$, то можно было бы использовать 4^0 , но там $V_{i_m-2}^n = V_{-1}^n$, что требует значения вне физической области $\bar{\Omega}$. Поэтому для узла $i_m = 1$ аппроксимация 4^0 непригодна. Можно было бы применить $2^0 \S 4$ однако она имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-й порядок точности. Нежелательно и применение $3^0 \S 4$. Предлагается следующая аппроксимация в узле $i_m = 1$, но только для случая $V_{i_m}^n \geq 0$:

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \left[\mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + 0,5 h_{mi_m} T_{+m} (\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \right] + O(\hbar_m^2) \quad (3)$$

6^0 . Аппроксимация на четырехточечном шаблоне $[x_{mi_m-2}, x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$.

Если в приграничном узле $i_m = N_m - 1$ имеет место случай $V_m^n \geq 0$, то применяется аппроксимация 4^0 . Если же в этом узле $V_m^n \leq 0$, то использование 3^0 из-за $V_{i_m+2}^n = V_{N_m+1}^n$, потребует значений вне физической области $\bar{\Omega}$. Поэтому, рассуждая, как в 5^0 , приходим к следующей аппроксимации в узле $i_m = N_m - 1$, но только для случая $V_m^n \leq 0$:

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \left[\mathfrak{R}_{x_m}^n - 0,5 h_{mi_m+1} T_{-m} (\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \right] + O(\hbar_m^2). \quad (4)$$

7^0 . Многообразие двухточечных аппроксимаций задается на основании $1^0, 2^0 \S 4$ в виде

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \left[\alpha_m^n \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + \beta_m^n \mathfrak{R}_{x_m}^n \right] + O(\beta_m^n h_{mi_m+1} - \alpha_m^n h_{mi_m}) + O(\hbar_m^2),$$

где $\alpha_m^n = \{\alpha_m^n(x), x \in \bar{\Omega}_h\}$, $\beta_m^n = \{\beta_m^n(x), x \in \bar{\Omega}_h\}$ - любые сеточные функции, такие, что $\alpha_m^n(x) + \beta_m^n(x) = 1$, $m = 1, \dots, M$, $x \in \bar{\Omega}_h$.

8^0 . Многообразие пятиточечных аппроксимаций задается на основании $3^0, 4^0$ в виде

$$\left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n = V_m^n \left[\alpha_m^n \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + \beta_m^n \mathfrak{R}_{x_m}^n \right] + O(\hbar_m^2),$$

где $\alpha_m^n, \beta_m^n = 1 - \alpha_m^n$ имеют тот же смысл, что и в 7^0 и выбирается самим пользователем из соображений точности аппроксимаций и устойчивости схемы.

Направленные разностные производные **без «аппроксимационной вязкости»** (Джакупов К.Б. /3/) получаются при значениях коэффициентов:

$$\alpha_{m_{i_1 \dots i_M}}^n = \frac{1 + \text{sign} V_{m_{i_1 \dots i_M}}^n}{2}, \quad \beta_{m_{i_1 \dots i_M}}^n = 1 - \alpha_{m_{i_1 \dots i_M}}^n = \frac{1 - \text{sign} V_{m_{i_1 \dots i_M}}^n}{2},$$

что можно записать в объединенном виде, используя дискретную функцию сигнатуры (знака) ($Q=0, \text{sign}(Q)=0$; $Q>0, \text{sign}(Q)=1$; $Q<0, \text{sign}(Q)=-1$):

$$\begin{aligned} \left(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m}\right)_{i_m}^n &= \frac{V_m^n + |V_m^n|}{2} \left\{ \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + 0,5h_{m_{i_m}} [T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 + \text{sign}(i_m - 1.5)}{2} + \right. \\ &+ T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 - \text{sign}(i_m - 1.5)}{2}] \left. \right\} + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \left\{ \mathfrak{R}_{x_m}^n - 0,5h_{m_{i_m+1}} \times \right. \\ &\times [T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 - \text{sign}(i_m - N_m + 1.5)}{2} + \\ &\left. + T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 + \text{sign}(i_m - N_m + 1.5)}{2}] \right\} + O(\hbar_{i_m}^2) \quad (5) \end{aligned}$$

Для упрощения записи в правой части (1) введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n &\equiv \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n + 0,5h_{m_{i_m}} [T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 + \text{sign}(i_m - 1.5)}{2} + \\ &+ T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 - \text{sign}(i_m - 1.5)}{2}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{x_m}^n &\equiv \mathfrak{R}_{x_m}^n - 0,5h_{m_{i_m+1}} [T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 - \text{sign}(i_m - N_m + 1.5)}{2} + \\ &+ T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) \frac{1 + \text{sign}(i_m - N_m + 1.5)}{2}] \end{aligned}$$

На основании этого (1) записывается кратко в виде

$$(V_m \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m})_{i_m}^n = \frac{|V_m^n| + V_m^n}{2} \mathfrak{R}_{\bar{x}_m^0}^n + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \mathfrak{R}_{x_m^0}^n + O(\hbar_{mi_m}^2) \quad (6)$$

§6. Аппроксимации диссипативных членов

В уравнения вязких сред входят вторые производные. Для них применяются следующие аппроксимации:

1⁰. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$ используется симметричная аппроксимация из §3:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} \right)_{i_m}^n &= \frac{\mathfrak{R}_{x_m}^n - \mathfrak{R}_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} + O(\hbar_{mi_m+1} - \hbar_{mi_m}) + O(\hbar_m^2) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n + O(\hbar_{mi_m+1} - \hbar_{mi_m}) + O(\hbar_m^2), \end{aligned}$$

где $(f_{x_m}^n - f_{\bar{x}_m}^n) \hbar_{mi_m}^{-1} \equiv f_{x_m \dot{x}_m}^n$ - разностная производная 2-го порядка. На равномерной сетке $\hbar_{mi_m} = \hbar_{mi_m+1} = \hbar_m$:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} \right)_{i_m}^n = \mathfrak{R}_{x_m \bar{x}_m}^n + O(\hbar_m^2) = \frac{\mathfrak{R}_{i_m-1}^n - 2\mathfrak{R}_{i_m}^n + \mathfrak{R}_{i_m+1}^n}{\hbar_m^2} + O(\hbar_m^2).$$

2⁰. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, x_{mi_m+2}]$ используется несимметричная аппроксимация вперед

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} \right)_{i_m}^n = T_{+m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) + O(\hbar_{mi_m+1})$$

Имеет 1-й порядок точности. Применен в **5⁰ §4.**

3⁰. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-2}, x_{mi_m-1}, x_{mi_m}]$ используется несимметричная аппроксимация назад

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x_m^2} \right)_{i_m}^n = T_{-m}(\mathfrak{R}_{x_m \dot{x}_m}^n) + O(\hbar_{mi_m-1})$$

Имеет 1-й порядок точности. Применен в **6⁰ §3.**

4⁰. Аппроксимации производных от потоков на шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$. Имеет место

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_m} \right)_{i_m}^n = \frac{(T_{+m} \mu^n + \mu^n) \mathfrak{R}_{x_m}^n - (\mu^n + T_{-m} \mu^n) \mathfrak{R}_{x_m}^n}{2 \hbar_{m_{i_m}}} + O(\hbar_{m_{i_m}+1} - \hbar_{m_{i_m}}) +$$

$$+ O(\hbar_{m_{i_m}}^2) \equiv \left[\frac{(T_{+m} \mu^n + \mu^n)}{2} \mathfrak{R}_{x_m}^n \right]_{\dot{x}_m} + O(\hbar_{m_{i_m}+1} - \hbar_{m_{i_m}}) + O(\hbar_{m_{i_m}}^2),$$

Для коэффициента $\mu \equiv 1$ отсюда получается **1⁰**. Для определения погрешности аппроксимаций используются ряды *Тейлора*:

$$T_{+m} \mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \sum_{S=1}^{\nu} \frac{\hbar_{m_{i_m}+1}^S}{S!} \frac{\partial^S \mathfrak{R}}{\partial x_m^S} + O(\hbar_{m_{i_m}+1}^{\nu+1}), \quad (1)$$

$$T_{-m} \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^n + \sum_{S=1}^{\nu} (-1)^S \frac{\hbar_{m_{i_m}}^S}{S!} \frac{\partial^S \mathfrak{R}^n}{\partial x_m^S} + O(\hbar_{m_{i_m}}^{\nu+1}), \quad (2)$$

$$T_{+m} T_{+m} \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^n + \sum_{S=1}^{\nu} \frac{(\hbar_{m_{i_m}+1} + \hbar_{m_{i_m}+2})^S}{S!} \frac{\partial^S \mathfrak{R}^n}{\partial x_m^S} + O((\hbar_{m_{i_m}+1} + \hbar_{m_{i_m}+2})^{\nu+1}), \quad (3)$$

$$T_{-m} T_{-m} \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^n + \sum_{S=1}^{\nu} (-1)^S \frac{(\hbar_{m_{i_m}} + \hbar_{m_{i_m}-1})^S}{S!} \frac{\partial^S \mathfrak{R}^n}{\partial x_m^S} + O((\hbar_{m_{i_m}} + \hbar_{m_{i_m}-1})^{\nu+1}), \quad (4)$$

$$T_{+m} T_{+m} \mathfrak{R}^n \equiv \mathfrak{R}_{i_1 \dots i_m + 2 \dots i_M}^n \equiv \mathfrak{R}(x_{1i_1}, \dots, x_{mi_m} + \hbar_{m_{i_m}+1} + \hbar_{m_{i_m}+2}, \dots, x_{ni_M}, t_n),$$

$$T_{-m} T_{-m} \mathfrak{R}^n \equiv \mathfrak{R}_{i_1 \dots i_m - 2 \dots i_M}^n \equiv \mathfrak{R}(x_{1i_1}, \dots, x_{mi_m} - \hbar_{m_{i_m}} - \hbar_{m_{i_m}-1}, \dots, x_{ni_M}, t_n).$$

Для аппроксимаций **1⁰**, **2⁰**, **9⁰** §3 достаточно (1), (2), надо положить в них $\nu = 1$, для проверки **3⁰**, **5⁰**, **6⁰**, **7⁰**, **8⁰**, **10⁰** §4 - в (1)-(4) надо положить $\nu = 2$, в §5 $\nu = 3$.

Замечание. В дальнейшем в нужных местах будут использованы следующие обозначения:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, h_{1i_1} = h_{xi},$$

$$h_{2i_2} = h_{yj}, h_{3i_3} = h_{zk}, N_1 = N_x, N_2 = N_y, N_3 = N_z$$

§7. Численное интегрирование. Формулы Ньютона-Котеса

Для вычисления одномерного интеграла $\int_a^b y(x) dx$ численными

методами интервал $x \in [a, b]$ разделяется на отрезки точками

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = a, x_N = b, y(x_i) \equiv y_i.$$

Формула *Ньютона-Котеса* имеет вид / 1/:

$$\int_{x_0}^{x_0+ih} y(x) dx \approx \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_N y_N,$$

где $\alpha_k = \frac{(-1)^{i-k}}{i!(i-k)!} \int_0^i \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-i)}{\lambda-k} d\lambda, k = 0, 1, \dots, N$

При $i=1$ получается формула трапеции:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y(x) dx \approx h \frac{(y_0 + y_1)}{2} \text{ с точностью } O(h^3), \text{ или обобщая эту}$$

формулу на весь отрезок, вычисляют приближенно

$$\int_a^b y(x) dx \approx (b-a) \frac{y(a) + y(b)}{2} \text{ с точностью } O((b-a)^3),$$

$$\int_a^b y(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+Nh} y(x) dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2} \right)$$

с точностью $O(h^3)$.

При $i=2$ из формулы *Ньютона-Котеса* получается более высокого порядка точности $O(h^5)$ приближение

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y(x) dx \approx \frac{h}{3} h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Наиболее простая формула четырехугольника

$$\int_a^b y(x) dx \approx (b-a) y\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

имеет точность $O((b-a)^2)$.

§8. Интерполирование сплайнами промежуточных значений сеточной функции. Простая интерполяция

Вычисленные по разностным схемам значения температуры, компонент скоростей, концентраций веществ, давления, плот-

ности и других физических величин определены только в узлах сеточных областей. Необходимые значения этих функций в промежутке между узлами находятся приближенно с помощью интерполяционных формул. Наиболее эффективным среди них является кубический многозвенник (сплайн) /14/, теория которого здесь излагается для функции, заданной на отрезке $[a, b]$, который разделен узлами $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ на n отрезочков:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

В этих точках заданы значения $\{f_i\}_{i=0}^n$ некоторой сеточной или иной функции $f(x)$: $f_i = f(x_i), i=0, 1, \dots, n$.

Функция $y=y(x)$ называется кубическим многозвенником или сплайном, если она обладает следующими свойствами:

1. $y(x)$ принадлежит классу $C^2([a, b])$, то есть непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;
2. на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i=1, 2, \dots, n$ является кубическим полиномом.

$$y(x) = y_i(x) = \sum_{\alpha=0}^3 a_{\alpha}^{(i)} (x_i - x)^{\alpha} = a_3^{(i)} (x_i - x)^3 + a_2^{(i)} (x_i - x)^2 + a_1^{(i)} (x_i - x) + a_0^{(i)} \quad (1)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Задача интерполирования функции $f(x)$ кубическим многозвенником $y(x)$ ставится так: в узлах они принимают значения интерполируемой функции

$$y(x_i) = f(x_i), i=0, 1, \dots, n, \quad (2)$$

на концах отрезка $[a, b]$ удовлетворяются дополнительные условия одного из следующих типов:

(a) $y'(x_i) = f'(x_i), i=0, i = n;$

(b) $y''(x_i) = f''(x_i), i=0, i = n;$

(c) на одном из концов выполняется условие (a), а на другом (b);

(d) функция $f(x)$ —периодическая с периодом $X = x_n - x_0$.

При последнем условии (d) функция $y(x)$ должна быть тоже периодической, что дает

$$y(a) = y(x_n), y'(x_0) = y'(x_n), y''(x_0) = y''(x_n)$$

Обозначим шаг сетки $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i=1, 2, \dots, n-1$. Из непрерывности $y(x)$ и ее первых двух производных в узлах x_i , $i=1, 2, \dots, n-1$, получается $3(n-1)$ уравнений;

$$\text{(непрерывность } y(x)\text{):} \quad y_{i+1}(x_i) = y_i(x_i) \quad (3)$$

$$\text{(непрерывность } y'(x)\text{):} \quad y'_{i+1}(x_i) = y'_i(x_i) \quad (4)$$

$$\text{(непрерывность } y''(x)\text{):} \quad y''_{i+1}(x_i) = y''_i(x_i) \quad (5)$$

$$i=1, 2, \dots, n-1$$

Из (1) и (2) следуют

$$y_i(x_i) = a_0^{(i)} = f(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n \quad (6)$$

Из (1) и (3) следуют

$$a_3^{(i)} h_{i-1}^3 + a_2^{(i)} h_{i-1}^2 + a_1^{(i)} h_{i-1} + a_0^{(i)} = a_0^{(i-1)}, \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

Отсюда в силу (6)

$$a_3^{(i)} h_{i-1}^3 + a_2^{(i)} h_{i-1}^2 + a_1^{(i)} h_{i-1} + f_i = f_{i-1}, \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

Из (1) и (4) следуют

$$3a_3^{(i)} h_{i-1}^2 + 2a_2^{(i)} h_{i-1} + a_1^{(i)} = a_1^{(i-1)}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Из (1) и (5) следует

$$6a_3^{(i)} h_{i-1} + 2a_2^{(i)} = 2a_2^{(i-1)}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

после сокращения на 2

$$3a_3^{(i)} h_{i-1} + a_2^{(i)} = a_2^{(i-1)}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Таким образом, для определения $3(n+1)$ неизвестных $\{a_1^{(i)}\}_{i=0}^n$, $\{a_2^{(i)}\}_{i=0}^n$, $\{a_3^{(i)}\}_{i=0}^n$ имеется n уравнений (8), n уравнений (9), n уравнений (11) – всего $3n$ уравнений.

Недостающие 3 уравнения должны быть получены из условий (a), (b), (c), (d). Допустим, имеет место условие (a). Тогда из (1) следуют

$$3a_3^{(1)} h_0^2 + 2a_2^{(1)} h_0 + a_1^{(1)} = -f'(a), \quad (12)$$

$$a_1^{(n)} = -f'(b), \quad (13)$$

$$-a_1^{(0)} = -f'(a), \quad (13^1)$$

Условия (b) дают

$$6a_3^{(1)} h_0 + 2a_2^{(1)} = f''(a), \quad (14)$$

$$a_2^{(n)} = \frac{f''(b)}{2}, \quad (15)$$

$$a_2^{(0)} = \frac{f''(a)}{2} \quad (15^1)$$

Условия (с) дают

$$3a_3^{(1)}h_0^2 + 2a_2^{(1)}h_0 + a_1^{(1)} = -f'(a), \quad (16)$$

$$a_2^{(n)} = \frac{f''(b)}{2}, \quad (17)$$

$$a_1^{(0)} = -f'(a) \quad (17^1)$$

или

$$6a_3^{(1)}h_0 + 2a_2^{(1)} = f''(a), \quad (18)$$

$$a_1^{(n)} = -f(b), \quad (19)$$

$$a_2^{(0)} = \frac{f''(a)}{2} \quad (19^1)$$

Из условия периодичности (d) следует

$$a_3^{(1)}h_0^3 + a_2^{(1)}h_0^2 + a_1^{(1)}h_0 + f_1 = f_n, \quad (20)$$

$$3a_3^{(1)}h_0^2 + 2a_2^{(1)}h_0 + a_1^{(1)} = a_1^{(n)}, \quad (21)$$

$$6a_3^{(1)}h_0 + 2a_2^{(1)} = 2a_2^{(n)} \quad (22)$$

Сопоставляя (22) с (11), (21) с (9), находим, что

$$a_2^{(0)} = a_2^{(n)}, \quad (23)$$

$$a_1^{(0)} = a_1^{(n)} \quad (24)$$

Так как из периодичности 1-й производной вытекает равенство (24), то из условия периодичности 2-й производной следуют

$$a_2^{(0)} = a_2^{(n)}, a_3^{(0)} = a_3^{(n)} \quad (25)$$

Таким образом, коэффициенты $a_\alpha^{(i)}$, $\alpha=0,1,2,3$ в (1) периодичны, что позволяет при их вычислении организовать периодическую прогонку. Из (11) следуют

$$a_3^{(i)} = \frac{a_2^{(i-0)} - a_2^{(i)}}{3h_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

Из (8) и (26) следует

$$a_1^{(i)} = \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - a_2^{(i)} h_{i-1} - a_3^{(i)} h_{i-1}^2 = \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - \frac{2a_2^{(i)} + a_2^{(i-1)}}{3} \cdot h_{i-1}, \quad (27)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Подставляя (26) и (27) в (9), найдем

$$\begin{aligned} (a_2^{(i-1)} - a_2^{(i)}) h_{i-1} + 2a_2^{(i)} h_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - \frac{2a_2^{(i)} + a_2^{(i-1)}}{3} h_{i-1} = \\ = \frac{f_{i-2} - f_{i-1}}{h_{i-2}} - \frac{2a_2^{(i-1)} + a_2^{(i-2)}}{3} h_{i-2}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (28)$$

После приведения подобных (28) записывается для $i+1$

$$h_{i-1} a_2^{(i-1)} + 2(h_{i-1} + h_i) a_2^{(i)} + h_i a_2^{(i+1)} = 3 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad (29)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Обозначается в дальнейшем

$$\Phi_i = 3 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Для определения $n+1$ неизвестных $\{a_2^{(i)}\}_{i=0}^n$ получена система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. В случае (b) из (14) и (26) при $i=1$ также следует, что

$$a_2^{(0)} = \frac{f''(a)}{2} \quad (30)$$

Матрица системы (29) симметрична и со строгим диагональным преобладанием, отсюда вытекает, что коэффициенты $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ определяются однозначно, следовательно, по формулам (26), (27) однозначно определяются и коэффициенты $\{a_3^{(i)}\}_{i=1}^n$ и $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^n$.

Решение системы (29) ищется методом прогонки. Для этого используется представление

$$a_2^{(i)} = \beta_i a_2^{(i+1)} + \gamma_i, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1, 0 \quad (31)$$

Подставляя

$$a_2^{(i-1)} = \beta_{i-1} a_2^{(i)} + \gamma_{i-1} \quad (32)$$

в (29) легко получить формулы прямых прогонок

$$\beta_i = \frac{h_i}{-2(h_{i-1} + h_i) - h_{i-1}\beta_{i-1}}, \quad (33)$$

$$\gamma_i = \frac{h_{i-1}\gamma_{i-1} - \Phi_i}{-2(h_{i-1} + h_i) - h_{i-1}\beta_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Для счета по (33) необходимо знать β_0, γ_0 . В случае (b) из сравнения (31) при $i=0$ с (30) следует

$$\beta_0=0, \gamma_0 = \frac{1}{2} f''(a) \quad (34)$$

Из условия (15) известно $a_2^{(n)} = \frac{f''(b)}{2}$, следовательно, осуществляя обратную прогонку по (31) от $i=n-1$ до 1, вычисляем все $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$, затем по (26), (27), $\{a_3^{(1)}\}_{i=1}^n$, $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^n$. Несколько сложнее реализация условий (a), (12), (13). В силу (13¹)

$$a_1^{(0)} = -f'(a) \quad (35)$$

Подставляя (36) и (27) при $i=1$ в (12), получаем условие для определения начальных коэффициентов β_0, γ_0 :

$$h_0(a_2^{(0)} - a_2^{(1)}) + 2a_2^{(1)}h_0 + \frac{f_0 - f_1}{h_0} - \frac{2a_2^{(1)} + a_2^{(0)}}{3}h_0 = -f'(a) \quad (36)$$

Отсюда

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}a_2^{(1)} + \frac{3}{2h_0}[-f'(a) - \frac{f_0 - f_1}{h_0}] \quad (37)$$

Сопоставляя (37) с (31) при $i = 0$, находим, что

$$\beta_0 = -\frac{1}{2}, \gamma_0 = \frac{3}{2h_0}[-f'(a) - \frac{f_0 - f_1}{h_0}] \quad (38)$$

Подставляя (27) в (13), получаем условие, необходимое для организации обратной прогонки (31):

$$\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} - \frac{2a_2^{(n)} + a_2^{(n-1)}}{3}h_{n-1} = -f'(b) \quad (39)$$

Отсюда

$$a_2^{(n-1)} = -2a_2^{(n)} + \frac{3}{h_{n-1}} \left[\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} + f'(b) \right] \quad (40)$$

Записывая (31) при $i=n-1$, имеем

$$a_2^{(n-1)} = \beta_{n-1} a_2^{(n)} + \gamma_{n-1} \quad (41)$$

Вычитая (40) из (41), находим

$$a_2^{(n)} = \frac{\frac{3}{h_{n-1}} \left[\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} + f'(b) \right] - \gamma_{n-1}}{2 + \beta_{n-1}} \quad (42)$$

Далее осуществляется обратная прогонка (31).

Формулы периодической прогонки Абрамова-Андреева

Ведение (29) в случае периодичности коэффициентов (23), (24), (25) ищется в виде

$$a_2^{(i)} = p_i + a_2^{(n)} q_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad (43)$$

где

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad (44)$$

$$i = n-2, n-3, \dots, 2, 1, \quad p_{n-1} = \beta_n, \quad q_{n-1} = \alpha_n + \gamma_n, \quad (45)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{-h_i}{2(h_{i-1} + h_i) + h_{i-1} \alpha_i}, \quad i=2, 3, \dots, n \quad (46)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\Phi_i - h_{i-1} \beta_i}{2(h_{i-1} + h_i) + h_{i-1} \alpha_i}, \quad i=2, 3, \dots, n \quad (47)$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{-h_{i-1} \gamma_i}{2(h_{i-1} + h_i) + h_{i-1} \alpha_i}, \quad i=2, 3, \dots, n \quad (48)$$

$$\alpha_2 = \frac{-h_1}{2(h_1 + h_0)}, \quad \beta_2 = \frac{\Phi_1}{2(h_1 + h_0)}, \quad \gamma_2 = \frac{-h_0}{2(h_1 + h_0)}, \quad (49)$$

$$a_2^{(n)} = \frac{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} p_1}{1 - \alpha_{n+1} q_1 - \gamma_{n+1}} \quad (50)$$

После вычисления $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ по формуле (43) из (26), (27) определяются $\{a_3^{(i)}\}_{i=1}^n$, $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^n$. На практике часто возникает

случай, когда на концах отрезка $[a, b]$ ни одно из условий (а), (b), (c), (d) не задано.

Некоторые авторы полагают $a_2^{(0)} = 0$, $a_2^{(n)} = 0$, т.е. приходят опять к случаю (а), положив приближенно

$$f'(a) \cong \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{(h_0 + h_1)} \left[\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0} \right] \quad (51)$$

с погрешностью $O((h_1^2 + h_0^2))$,

$$f'(b) \cong \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{(h_{n-1} + h_{n-2})} \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} \right) \quad (52)$$

с погрешностью $O((h_{n-1}^2 + h_{n-2}^2))$.

Для трижды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ Ю.С.Завьяловым получены следующие оценки точности интерполяции

$$|y(x) - f(x)| \leq \frac{5}{2} H^3 \cdot E, \quad |y'(x) - f'(x)| \leq 5H^2 \cdot E, \quad (53)$$

$$|y''(x) - f''(x)| \leq 5H \cdot E, \quad \text{где } H = \max_i h_i, \quad E = \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f'''(\xi)|.$$

Применение. Пусть требуется найти приближенное значение функции $f(x^*)$ в точке x^* , находящейся в интервале $x_{i-1} < x^* < x_i$. В этом случае применяется сплайн с номером i , куда подставляется x^* для вычисления приближенного значения:

$$f(x^*) = y_i(x^*) = a_3^{(i)}(x_i - x^*)^3 + a_2^{(i)}(x_i - x^*)^2 + a_1^{(i)}(x_i - x^*) + a_0^{(i)}$$

Простая интерполяция. Иной раз для вычисления $f(x^*)$ в точке $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$ можно воспользоваться пропорциональной формулой

$$f(x^*) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x^*) + f(x_i)(x^* - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})},$$

дающей погрешность $O(x_i - x_{i-1})$.

Вопросы:

1. Написать в индексном виде выражение (1) в §5.
2. Написать в индексном виде выражение (2) в §5.

3. Доказать, что $T_{+m}T_{-m} = E$.
4. Написать в индексном виде выражение (1) в §6.
5. Вывести погрешность формулы четырехугольника.

Модуль-3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТА, ЭЙЛЕРА

§1. Дифференциальные уравнения динамики точки

Дифференциальное уравнение динамики точки вытекают из второго закона *Ньютона* в следующем виде

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1)$$

Спроектировав обе части данного уравнения на оси координат $Oxyz$, получаем систему дифференциальных уравнений движения материальной точки:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z, \quad (2)$$

В общем случае система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \end{aligned} \quad (3)$$

В момент времени $t = t_0$ задаются координаты начального положения точки

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0 \quad (4)$$

и начальная скорость

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0, \frac{dy}{dt} = \dot{y}_0, \frac{dz}{dt} = \dot{z}_0 \quad (5)$$

§2. Методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Первоначально система (3) приводится к следующей системе пониженного порядка

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F_x(t, x, y, z, u, v, w) / m, \\ \frac{dv}{dt} &= F_y(t, x, y, z, u, v, w) / m, \\ \frac{dw}{dt} &= F_z(t, x, y, z, u, v, w) / m, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w\end{aligned}\quad (6)$$

С момента $t = t_0$ во временном интервале с шагом τ располагаются узлы деления

$$t_n = t_0 + n\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t_{n+1} = t_n + \tau$$

В этих узлах значения функций обозначаются нижним индексом $x(t_n) = x_n, y(t_n) = y_n, z(t_n) = z_n, u(t_n) = u_n, v(t_n) = v_n, w(t_n) = w_n$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4), \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{6}(e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4), \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),\end{aligned}\quad (7)$$

В силу начальных условий (5) даны

$$u_0 = \dot{x}_0, v_0 = \dot{y}_0, w_0 = \dot{z}_0 \quad (8)$$

Далее последовательно насчитываются коэффициенты (7)

$$\begin{aligned} g_1 &= \tau F_x(t_n, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n, w_n) / m, \\ f_1 &= \tau F_y(t_n, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n, w_n) / m, \\ e_1 &= \tau F_z(t_n, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n, w_n) / m, \end{aligned} \quad (9)$$

$$k_1 = \tau u_n, \quad m_1 = \tau v_n, \quad l_1 = \tau w_n,$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{d_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, u_n + \frac{g_1}{2}, v_n + \frac{f_1}{2}, w_n + \frac{e_1}{2}) / m, \\ f_2 &= \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{d_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, u_n + \frac{g_1}{2}, v_n + \frac{f_1}{2}, w_n + \frac{e_1}{2}) / m, \\ e_2 &= \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{d_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, u_n + \frac{g_1}{2}, v_n + \frac{f_1}{2}, w_n + \frac{e_1}{2}) / m, \end{aligned}$$

$$k_2 = \tau(u_n + \frac{g_1}{2}), \quad m_2 = \tau(v_n + \frac{f_1}{2}), \quad l_2 = \tau(w_n + \frac{e_1}{2}),$$

$$\begin{aligned} g_3 &= \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{d_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, u_n + \frac{g_2}{2}, v_n + \frac{f_2}{2}, w_n + \frac{e_2}{2}) / m, \\ f_3 &= \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{d_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, u_n + \frac{g_2}{2}, v_n + \frac{f_2}{2}, w_n + \frac{e_2}{2}) / m, \\ e_3 &= \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{d_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, u_n + \frac{g_2}{2}, v_n + \frac{f_2}{2}, w_n + \frac{e_2}{2}) / m, \end{aligned}$$

$$k_3 = \tau(u_n + \frac{g_2}{2}), \quad m_3 = \tau(v_n + \frac{f_2}{2}), \quad l_3 = \tau(w_n + \frac{e_2}{2}),$$

$$\begin{aligned} g_4 &= \tau F_x(t_n + \tau, x_n + k_3, y_n + d_3, z_n + l_3, u_n + g_3, v_n + f_3, w_n + e_3) / m, \\ f_4 &= \tau F_y(t_n + \tau, x_n + k_3, y_n + d_3, z_n + l_3, u_n + g_3, v_n + f_3, w_n + e_3) / m, \\ e_4 &= \tau F_z(t_n + \tau, x_n + k_3, y_n + d_3, z_n + l_3, u_n + g_3, v_n + f_3, w_n + e_3) / m, \\ k_4 &= \tau(u_n + g_3), \quad m_4 = \tau(v_n + f_3), \quad l_4 = \tau(w_n + e_3), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Второй метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности

По начальным условиям (4) и (5) при $t = t_0$ имеем равенства:

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$$

Второй метод *Рунге-Кутты* реализуется по алгоритму:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n \tau + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \tau + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4), \\
 z_{n+1} &= z_n + \dot{z}_n \tau + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\
 k_1 &= \tau F_x(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) / m, \\
 d_1 &= \tau F_y(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) / m, \\
 l_1 &= \tau F_z(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) / m, \\
 k_2 &= \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2}, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2}) / m, \\
 d_2 &= \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2}, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2}) / m, \\
 l_2 &= \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2}, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2}) / m, \\
 k_3 &= \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4} \tau, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4}, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2}) / m, \\
 d_3 &= \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4} \tau, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4}, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2}) / m, \\
 & z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2}) / m,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4} \tau, y_n + \dot{y}_n \frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4}, \\
& z_n + \dot{z}_n \frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2}) / m, \\
k_4 &= \tau F_x(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n \tau + \frac{k_2}{2} \tau, y_n + \dot{y}_n \tau + \frac{d_2}{2}, \\
& z_n + \dot{z}_n \tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3) / m, \\
d_4 &= \tau F_y(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n \tau + \frac{k_2}{2} \tau, y_n + \dot{y}_n \tau + \frac{d_2}{2}, \\
& z_n + \dot{z}_n \tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3) / m, \\
l_4 &= \tau F_z(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n \tau + \frac{k_2}{2} \tau, y_n + \dot{y}_n \tau + \frac{d_2}{2}, \\
& z_n + \dot{z}_n \tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3) / m, n = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

§3. Методы Эйлера

Численные методы Эйлера рассмотрим для простейшего уравнения 1-го порядка

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{R}(t, Q), Q|_{t=t_0} = Q_0$$

Алгоритм 1-го порядка точности

$$Q_{n+1} = Q_n + \tau \mathfrak{R}(t_n, Q_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

С использованием обозначений (9) данный метод реализуется для решения системы (6) в виде:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + g_1, & v_{n+1} &= v_n + f_1, & w_{n+1} &= w_n + e_1, \\
x_{n+1} &= x_n + k_1, & y_{n+1} &= y_n + d_1, & z_{n+1} &= z_n + l_1
\end{aligned}$$

Метод Эйлера 2-го порядка точности:

$$Q_{n+1} = Q_n + \tau \mathfrak{R}(t_n + \frac{\tau}{2}, Q_n + \mathfrak{R}(t_n, Q_n) \frac{\tau}{2}), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Метод Эйлера 3-го порядка точности:

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{\tau}{2} [\mathfrak{R}(t_n, Q_n) + \mathfrak{R}(t_{n+1}, Q_n + \mathfrak{R}(t_n, Q_n)\tau)], n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Вопросы:

1. Для системы (6) написать методы Эйлера 2-го и 3-го порядков точности.
2. Используя другой метод Рунге-Кутты тоже 4-го порядка точности:

$$\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{R}(t, Q), Q|_{t=t_0} = Q_0,$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{8}(s_1 + 3s_2 + 3s_3 + s_4),$$

$$s_1 = \tau \mathfrak{R}(t_n, Q_n), s_2 = \tau \mathfrak{R}(t_n + \frac{\tau}{3}, Q_n + \frac{s_1}{3}), \quad (10)$$

$$s_3 = \tau \mathfrak{R}(t_n + \frac{2\tau}{3}, Q_n - \frac{s_1}{3} + s_2),$$

$$s_4 = \tau \mathfrak{R}(t_n + \tau, Q_n + s_1 - s_2 + s_3),$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

написать для численного решения системы (6) алгоритм, подобный (10).

3. Какой порядок погрешности имеют методы Рунге-Кутты?
4. Какой порядок погрешности имеют методы Эйлера?
5. Применить методы Рунге-Кутты для системы

$$y'' = 2,3y'^2 - e^{-x^3} + yz', z'' = \sin z' + 34 \cos z'^4 y',$$

$$прих = x_0, y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y'(x_0) = y'_0, z'(x_0) = z'_0.$$

Модуль-4

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

§1. Уравнения динамики вязкой жидкости

В уравнениях *Навье* параболическому (более точно-квазипараболическому) типу принадлежат уравнения, вытекающие из закона об изменении импульса /1/:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho F_x,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho F_y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

задаются начальные условия при $t=0$:

$$u(x, y, 0) = d_u(x, y), v(x, y, 0) = d_v(x, y),$$

и краевые условия на S :

$$u(x, y, t)|_S = \varphi_u(x, y, t), v(x, y, t)|_S = \varphi_v(x, y, t);$$

в трехмерных течениях [2/]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho F_x,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho F_y,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho F_z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \rho = const > 0, \mu = const > 0,$$

начальные условия при $t=0$: $u(x, y, z, 0) = d_u(x, y, z),$

$v(x, y, z, 0) = d_v(x, y, z), w(x, y, z, 0) = d_w(x, y, z),$

краевые условия на S : $u(x, y, z, t)|_S = \varphi_u(x, y, z, t),$

$v(x, y, z, t)|_S = \varphi_v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)|_S = \varphi_w(x, y, z, t),$

здесь $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ - вектор скорости. Для переменных коэффициента вязкости μ и плотности ρ **новые уравнения динамики вязкого газа, обоснованные Джакуповым К.Б.** в монографиях [3/, /17/, являются квазипараболическими:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{\mu}{3} \operatorname{div}\vec{v}\right) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \rho F_x,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{\mu}{3}\operatorname{div}\vec{w}\right) = \operatorname{div}(\mu\operatorname{grad}v) + \rho F_y,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{\mu}{3}\operatorname{div}\vec{w}\right) = \operatorname{div}(\mu\operatorname{grad}w) + \rho F_z,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad p = \rho RT,$$

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \operatorname{div}\vec{w} - \frac{1}{3} \mu (\operatorname{div}\vec{w})^2 + \\ & \quad + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

задаются начальные условия при $t=0$: $u(x, y, z, 0) = d_u(x, y, z)$,

$v(x, y, z, 0) = d_v(x, y, z)$, $w(x, y, z, 0) = d_w(x, y, z)$,

$T(x, y, z, 0) = d_T(x, y, z)$, $\rho(x, y, z, 0) = d_\rho(x, y, z)$,

краевые условия Дирихле на S : $u(x, y, z, t)|_S = \varphi_u(x, y, z, t)$,

$v(x, y, z, t)|_S = \varphi_v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)|_S = \varphi_w(x, y, z, t)$,

$T(x, y, z, t)|_S = \varphi(x, y, z, t)$; или краевые условия фон Неймана

на S : $\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} \Big|_S = \varphi(x, y, z, t)$ - задается поток тепла.

§2. Уравнения Гельмгольца для вихря скорости и функции тока

Получаются исключением давления из уравнений Навье

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega$$

Для них ставятся: начальное условие при $t=0$ $\omega(x, y, 0) = d_\omega(x, y)$ и краевые условия на S :

$$\left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \right|_S = \varphi_u(x, y, t), \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x} \right|_S = -\varphi_v(x, y, t)$$

В системе *Гельмгольца* уравнение для вихря скорости ω параболического типа, а уравнение для функция тока ψ эллиптического.

Пусть $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ - орт внешней нормали к границе S . Тогда имеют место соотношения

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n} = \cos(\vec{n}; \vec{i}), n_y = \frac{\partial y}{\partial n} = \cos(\vec{n}; \vec{j}),$$

на основании чего задается нормальная производная от ψ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial n} \right|_S &= \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x} \right|_S \frac{\partial x}{\partial n} + \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \right|_S \frac{\partial y}{\partial n} = \\ &= \varphi_u(x, y, t) n_y - \varphi_v(x, y, t) n_x = \varphi_u(x, y, t) \cos(\vec{n}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y, t) \cos(\vec{n}; \vec{i}) \end{aligned}$$

Пусть $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j}$ - орт касательной к границе S . Аналогично имеют место соотношения

$$s_x = \frac{\partial x}{\partial s} = \cos(\vec{s}; \vec{i}), s_y = \frac{\partial y}{\partial s} = \cos(\vec{s}; \vec{j}),$$

на основании чего задается касательная производная от ψ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial s} \right|_S &= \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x} \right|_S \frac{\partial x}{\partial s} + \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \right|_S \frac{\partial y}{\partial s} = \\ &= \varphi_u(x, y, t) s_y - \varphi_v(x, y, t) s_x = \varphi_u(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{i}) \end{aligned}$$

Это выражение интегрируется вдоль дуги границы от некоторой заданной точки S_0 до произвольной точки S :

$$\int_{S_0}^S \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial s} ds = \int_{S_0}^S [\varphi_u(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{i})] ds$$

В результате получается краевое условие типа *Дирихле*:

$$\psi(x, y, t)|_S - \psi(x_0, y_0, t)|_{S_0} = \int_{S_0}^S [\varphi_u(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y, t) \cos(\vec{s}; \vec{i})] ds$$

Здесь (x_0, y_0) координаты точки отсчета S_0 . В силу произвола в определении функции тока полагается $\psi(x_0, y_0, t)|_{S_0} = 0$.

§3. Уравнения теплопроводности

Параболическими являются уравнения распространения тепла в твердом теле или в неподвижной жидкости (газе) /1/:

одномерное
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

задаются начальное условие при $t=0$: $T(x, 0) = d(x)$,

краевые условия на S : $T(0, t)|_S = \varphi_1(t), T(a_1, t)|_S = \varphi_2(t)$;

двумерное
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

начальное условие при $t=0$: $T(x, y, 0) = d(x, y)$,

краевое условие *Дирихле* на S : $T(x, y, t)|_S = \varphi(x, y, t)$;

трехмерное
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

начальное условие при $t=0$: $T(x, y, z, 0) = d(x, y, z)$,

краевое условие *Дирихле* на S : $T(x, y, z, t)|_S = \varphi(x, y, z, t)$; или

краевое условие *фон Неймана* на S : $\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n}|_S = \varphi(x, y, z, t)$,

$\lambda > 0$ - коэффициент теплопроводности, $c > 0$ - коэффициент удельной теплоемкости.

§4. Уравнения диффузии

Параболическими являются уравнения, описывающие диффузию субстанции C в среде, движущейся со скоростью $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ /2/:

одномерное
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

задаются начальное условие при $t=0$: $C(x,0) = d(x)$,

краевые условия на S : $C(0,t)|_S = \varphi_1(t), C(a_1,t)|_S = \varphi_2(t)$;

двумерное
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right),$$

начальное условие при $t=0$: $C(x,y,0) = d(x,y)$,

краевое условие *Дирихле* на S : $C(x,y,t)|_S = \varphi(x,y,t)$;

трехмерное
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right),$$

начальное условие при $t=0$: $C(x,y,z,0) = d(x,y,z)$,

краевое условие *Дирихле* на S : $C(x,y,z,t)|_S = \varphi(x,y,z,t)$; или

краевое условие *фон Неймана* на S : $\frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial n} \Big|_S = \varphi(x,y,z,t)$,

коэффициент диффузии $D > 0$.

§5. Уравнения распространения тепла в газах

Параболическими являются уравнения распространения тепла в газах, движущихся со скоростями $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ [3], [17]:

одномерное

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

задаются начальное условие при $t=0$: $T(x,0) = d(x)$,

краевые условия на S : $T(0,t)|_S = \varphi_1(t), T(a_1,t)|_S = \varphi_2(t)$;

двумерное

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$+ \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right],$$

начальное условие при $t=0$: $T(x, y, 0) = d(x, y)$,

краевое условие Дирихле на S : $T(x, y, t)|_S = \varphi(x, y, t)$;

трехмерное

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{1}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

начальное условие при $t=0$: $T(x, y, z, 0) = d(x, y, z)$,

краевое условие Дирихле на S : $T(x, y, z, t)|_S = \varphi(x, y, z, t)$; или

краевое условие фон Неймана на S : $\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} \Big|_S = \varphi(x, y, z, t)$.

§6. Уравнения Бюргерса

В монографии [4] разностные схемы приводятся для уравнений, названных уравнениями Бюргерса:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ставятся начальное условие при $t=0$: $u(x, 0) = d(x)$,

и краевые условия на S : $u(0, t)|_S = \varphi_1(t)$, $u(a_1, t)|_S = \varphi_2(t)$.

Вопросы:

1. Написать уравнения Навье для несжимаемой жидкости.
2. Написать уравнения Гельмгольца.
3. Написать уравнения распространения тепла в твердых телах.
4. Написать уравнения распространения тепла в газах.
5. Написать уравнения диффузии.

Модуль-5
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Постановка задачи

Рассматривается задача *Коши-Дирихле* для одномерного уравнения параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + f(x, t), a^2 = \text{const}, \\ \Phi \Big|_{t=t_0} &= d(x), \Phi \Big|_{x=0} = \varphi(0, t), \Phi \Big|_{x=a_1} = \varphi(a_1, t) \end{aligned} \quad (1)$$

§2. Семейство явных схем

Заменяя частные производные в дифференциальном уравнении на приведенные в **модуле-2** конечно-разностные соотношения и отбрасывая погрешности аппроксимаций, получаем соответствующие разностные схемы. Начнем с исследований явных схем.

Индексная запись явных схем имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n \left[\alpha \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} \right] &= \\ = a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\hbar_{xi}} + f_i^n, \alpha + \beta = 1, \\ i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau$$

Безындексная запись через разностные производные:

$$\begin{aligned} \Phi_t^n + u^n \left[\alpha \Phi_{\bar{x}}^n + \beta \Phi_x^n \right] &= a^2 \Phi_{xx}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}, \\ \Phi^0 &= d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Запись через разностные операторы:

$$\frac{E\Phi^{n+1} - E\Phi^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n \left[\alpha \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} \right] = \quad (4)$$

$$= a^2 \left(\frac{\Delta_{+1} \Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1} \Phi^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\hbar_{xi}} + Ef^n, \alpha + \beta = 1, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau,$$

где $\hbar_{xi} = 0.5(h_{xi+1} + h_{xi})$, параметры $\alpha = const, \beta = 1 - \alpha$ задаются из соображений точности и устойчивости схемы.

Аппроксимация. Вводится *погрешность схемы*

$$Z^n(x) = \Phi^n(x) - \overline{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \quad (5)$$

Здесь $\overline{\Phi}^n(x) = \overline{\Phi}(x, t_n)$, $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x, t)$ точное решение задачи (1), обладающее необходимым числом непрерывных производных, входящих в ряды *Тейлора*. Считаются заранее заданными следующие функции

$$u = u(x, t), f = f(x, t), d = d(x), \varphi = \varphi(x, t)$$

Из (5) определяем

$$\Phi^n(x) = Z^n(x) + \overline{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau, \quad (6)$$

иначе $\Phi^n = Z^n + \overline{\Phi}^n, x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$, и подставляем в схему (3).

В результате получаем аналогичную разностную задачу

$$\begin{aligned} Z_t^n + \overline{\Phi}_t^n + u^n [\alpha Z_{\bar{x}}^n + \beta Z_x^n] + u^n [\alpha \overline{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta \overline{\Phi}_x^n] = \\ = a^2 Z_{x\bar{x}}^n + a^2 \overline{\Phi}_{x\bar{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}, \end{aligned}$$

$$Z^0 + \overline{\Phi}^0 = d(x), x \in \Omega_h, Z^n \Big|_{S_h} + \overline{\Phi}^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \quad (7)$$

Согласно вышеизложенному *погрешность аппроксимации будет равна*

$$\begin{aligned} \psi^n(x) = a^2 \overline{\Phi}_{x\bar{x}}^n - \overline{\Phi}_t^n - u^n [\alpha \overline{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta \overline{\Phi}_x^n] + f^n = \\ = O(\tau_{n+1}) + O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + \\ + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2), x \in \Omega_h, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом здесь введены два понятия теории разностных схем: первое - *погрешность схемы* $Z^n = Z(x, t_n)$, второе - *погрешность аппроксимации* $\psi^n = \psi(x, t_n)$. Точное решение удовлетворяет начальному и краевым условиям

$$\overline{\Phi}^0 = d(x), x \in \Omega_h, \overline{\Phi}^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \quad (9)$$

Поэтому для погрешности схемы из (7) вытекает задача

$$\begin{aligned} Z_t^n + u^n [\alpha Z_x^n + \beta Z_x^n] &= a^2 Z_{xx}^n + \psi^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}, \\ Z^0 &= 0, x \in \Omega_h, Z^n \Big|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \end{aligned} \quad (10)$$

Укажем на прямое подобие систем (10) и (3). Это сходство вытекает из линейности исходной системы (1). В будущем, используя данное сходство, для погрешности схемы будет сразу же написана разностная задача типа (10).

Сходимость. Обуславливаются, что схема является сходящейся, если при бесконечном сгущении узлов сеток, т.е. при стремлении шагов сетки к нулю, пределом решения разностной задачи является точное решение исходной дифференциальной задачи:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \Phi_i^n = \overline{\Phi}(x_i, t_n), \forall i, \forall n, \quad \tau = \max_n \tau_n, \quad h = \max_i h_{xi}$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0} (\Phi_i^n - \overline{\Phi}(x_i, t_n)) = 0,$$

следовательно, согласно (5) погрешность схемы должна стремиться к нулю

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0} Z_i^n = 0 \forall i, \forall n, \quad \tau = \max_n \tau_n, \quad h = \max_i h_{xi} \quad (11)$$

При доказательстве сходимости для любой схемы нужно показать выполнение предела (11).

Определение. Разностная схема является сходящейся, если для нормы погрешности схемы имеет место оценка

$$\|Z^{k+1}\| \leq M_0 \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^n\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1, \quad (12)$$

где $M_0 > 0$ - константа, не зависящая от сеток.

Если для выполнения неравенств (12), требуются какие-либо условия, то схема называется условно сходящейся, если же (12) выполняется без условий на шаги сетки, то схема объявляется абсолютно сходящейся. Для доказательства сходимости явной схемы, предварительно сгруппируем члены уравнения (10), записанной в индексном виде. Получается следующее выражение:

$$Z_i^{n+1} = [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] Z_i^n +$$

$$+ \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) Z_{i-1}^n + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) Z_{i+1}^n + \tau_{n+1} \psi_i^n, \quad (13)$$

$$\alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1,$$

$$Z_i^0 = 0, i = 1, \dots, N_x - 1, Z_0^n = 0, Z_{N_x}^n = 0, n = 0, 1, \dots, N_\tau \quad (14)$$

Теорема-1 (теорема о сходимости). Явные схемы (2) сходятся со скоростью

$$O(\tau_{n+1}) + O(\beta \hbar_{xi+1} - \alpha \hbar_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2 (\hbar_{xi+1} - \hbar_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2)$$

при выполнении следующих условий:

$$A) [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \geq 0,$$

$$B) \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, \quad C) \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0;$$

$i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$. Доказательство. Берется по модулю от обеих частей (13) и применяются правила оценок модулей

$$|Z_i^{n+1}| = | [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] Z_i^n +$$

$$+ \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) Z_{i-1}^n + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) Z_{i+1}^n + \tau_{n+1} \psi_i^n | \leq$$

$$\leq [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] |Z_i^n| +$$

$$+ |\tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)| \cdot |Z_{i-1}^n| + |\tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right)| \cdot |Z_{i+1}^n| + |\tau_{n+1} \psi_i^n|, \quad (15)$$

$$\alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$$

При выполнении условий A), B), C) теоремы 1 и т.к. $\tau_{n+1} > 0$ в (15) знаки модули заменяются на круглые скобки, вследствие

чего совершается переход к неравенствам

$$\begin{aligned}
|Z_i^{n+1}| \leq & [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \\
& + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_{i-1}^n| + \\
& + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_{i+1}^n| + \tau_{n+1} \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |\psi_i^n|, \\
& \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (16)
\end{aligned}$$

В силу нулевых краевых условий (14) выполняются следующие неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_{i-1}^n| \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n|, \quad \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_{i+1}^n| \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n|, \forall n \quad (17)$$

На их основании из (16) вытекает

$$\begin{aligned}
|Z_i^{n+1}| \leq & [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \\
& + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \\
& + \tau_{n+1} \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |\psi_i^n|, \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (18)
\end{aligned}$$

После сокращений

$$\begin{aligned}
|Z_i^{n+1}| \leq & \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \tau_{n+1} \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |\psi_i^n|, \\
& \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (19)
\end{aligned}$$

Неравенства (19) имеют место для всех внутренних узлов сетки, в том числе в узлах, в которых достигается максимум модуля

$$\max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^{n+1}| \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| + \tau_{n+1} \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |\psi_i^n|, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (20)$$

В теории разностных схем вводится понятие *C-нормы* или максимум нормы сеточной функции:

$$\|Z^n\| = \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |Z_i^n| \quad (21)$$

Норма обладает следующими свойствами:

$$1) \| Z^n \| \geq 0, \text{ если } Z^n = 0, \text{ то } \| Z^n \| = 0,$$

$$2) \| cZ^n \| = |c| \| Z^n \|,$$

$$3) \| Z^n + U^n \| \leq \| Z^n \| + \| U^n \|$$

Поэтому (20) записывается экономно в нормах

$$\| Z^{n+1} \| \leq \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| \psi^n \|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1 \quad (22)$$

Сложим неравенства (22)

$$\sum_{n=0}^k \| Z^{n+1} \| \leq \sum_{n=0}^k \| Z^n \| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

После сокращений получается

$$\| Z^{k+1} \| \leq \| Z^0 \| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1 \quad (23)$$

Начальное условие (14) дает $\| Z^0 \| = 0$, в силу чего

$$\| Z^{k+1} \| \leq \| Z^0 \| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \psi^n \| = \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Далее следует цепочка неравенств

$$\| Z^{k+1} \| \leq \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \psi^n \| \leq \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \max_{0 \leq n \leq k} \| \psi^n \| \leq \max_{0 \leq n \leq k} \| \psi^n \| \sum_{n=0}^k \tau_{n+1}$$

На основании очевидной оценки

$$\sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \leq \bar{t} \quad (24)$$

вытекают неравенства

$$\| Z^{k+1} \| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \| \psi^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1, \quad (25)$$

где пределом погрешности аппроксимации является нуль

$$\| \psi^n \| = O(\tau_{n+1}) + \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} [O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2)] + \\ + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2) \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Поэтому погрешность схемы стремится к нулю

$$\| Z^{k+1} \| = \| \Phi^{k+1} - \bar{\Phi}^{k+1} \| \rightarrow 0, \Phi^{k+1} \rightarrow \bar{\Phi}^{k+1}$$

Теорема доказана.

Для доказательства данной теоремы потребовалось выполнение условий А),В),С), следовательно, явные схемы (2) являются *условно сходящимися* по определению.

Устойчивость. В процессе вычислений вкрадываются числовые погрешности, связанные с неточным заданием входных данных задачи, с округлением, с разрядностью представления числа в процессоре и т.д. При длительных вычислениях эти погрешности могут возрасти и исказить получаемое решение, если не предпринять специальных мер. Если указанные погрешности не портят решение, остаются при счете в указанных пределах, схема объявляется **устойчивой, в ином случае, когда погрешности могут бесконечно возрасти, неустойчивой.** Будем считать, что числовые погрешности $\varepsilon = \varepsilon(x)$ имеются при задании начального условия d , а погрешности $\delta = \delta(x, t)$ имеются в свободном члене f . Следовательно, на самом деле разностная задача содержит указанные включения и имеет вид

$$\hat{\Phi}_t^n + u^n [\alpha \hat{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta \hat{\Phi}_x^n] = a^2 \hat{\Phi}_{xx}^n + f^n + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\hat{\Phi}^0 = d(x) + \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{\Phi}^n|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (26)$$

Сеточная функция

$$\hat{Z}^n(x) = \hat{\Phi}^n(x) - \Phi^n(x), x \in \bar{\Omega}_h, t \in \bar{\Omega}_\tau, \quad (27)$$

где $\Phi^n(x), x \in \bar{\Omega}_h, t \in \bar{\Omega}_\tau$ есть точное решение исходной задачи (2), а $\hat{\Phi}^n(x), x \in \bar{\Omega}_h, t \in \bar{\Omega}_\tau$ - точное решение задачи (26), называется *возмущением* решения. Из (27) находим

$$\hat{\Phi}^n(x) = \hat{Z}^n(x) + \Phi^n(x), x \in \bar{\Omega}_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (28)$$

и подставляем в (26)

$$\hat{Z}^0 + \Phi^0 = d(x) + \varepsilon(x), x \in \Omega_h,$$

$$\hat{Z}^n|_{S_h} + \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (29)$$

В силу соотношений (3) из (29) вытекают

$$\hat{Z}_t^n + u^n [\alpha \hat{Z}_{\bar{x}}^n + \beta \hat{Z}_x^n] = a^2 \hat{Z}_{xx}^n + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\hat{Z}^0 = \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{Z}^n|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (30)$$

Отметим подобие разностной задачи (30) для *возмущения* с разностной задачей (10) для *погрешности схемы*. Индексная запись (30) совершенно аналогична (13)-(14)

$$\begin{aligned} \hat{Z}_i^{n+1} = & [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hat{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hat{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \hat{Z}_i^n + \\ & + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hat{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \hat{Z}_{i-1}^n + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hat{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \hat{Z}_{i+1}^n + \tau_{n+1} \delta_i^n, \\ & \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \quad (31) \\ & \hat{Z}_i^0 = \varepsilon_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \hat{Z}_0^n = 0, \hat{Z}_{N_x}^n = 0, n = 0, 1, \dots, N_\tau \end{aligned}$$

Определение. Разностная схема устойчива по начальному данному d и свободному члену f , если для нормы возмущения имеет место оценка

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \leq M_1 \| \varepsilon \| + M_2 \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \| \delta^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1 \quad (32)$$

Здесь $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ - не зависящие от сеток константы.

Если для получения неравенств (32) требуются какие-либо условия, то схема объявляется *условно устойчивой*, если не потребуются – *абсолютно или безусловно устойчивой*.

Теорема-2 (теорема об устойчивости). Явные схемы (3) будут устойчивыми при выполнении следующих условий:

$$A) [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hat{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hat{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \geq 0,$$

$$B) \frac{a^2}{h_{xi+1} \hat{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, \quad C) \frac{a^2}{h_{xi} \hat{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0;$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы-2 над (31) проделываются действия, аналогичные (15)-(23), в результате приходим к неравенствам

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \leq \| \hat{Z}^0 \| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \delta^n \| = \| \varepsilon \| \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \| \delta^n \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Используя (24), находим нужное неравенство

$$\|\hat{Z}^{k+1}\| \leq \|\varepsilon\| + \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\delta^n\|, k=0,1,\dots,N_\tau - 1 \quad (33)$$

Сравнение с определением (33) дает $M_1 = 1, M_2 = \bar{t}$. Ч.т.д.

Замечание. Нормы, стоящие в определениях сходимости и устойчивости, являются *C-нормами* или «*максимум нормами*». Однако, указанные определения имеют место и в других сеточных нормах. Например, в /3/ и /6/ используется так

называемая энергетическая норма типа $\|\Psi^n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \hbar_i (\Psi_i^n)^2}$.

Алгоритм решения. Из схемы (2) явным счетом вычисляются

$$\begin{aligned} \Phi_i^{n+1} &= [1 - \tau_{n+1} (\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \Phi_i^n + \\ &+ \tau_{n+1} (\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}) \Phi_{i-1}^n + \tau_{n+1} (\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}) \Phi_{i+1}^n + \tau_{n+1} f_i^n, \\ &\alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \\ &\Phi_i^0 = 0, i = 1, \dots, N_x - 1, \Phi_0^n = 0, \Phi_{N_x}^n = 0, n = 0, 1, \dots, N_\tau \end{aligned}$$

§3. Теорема эквивалентности Лакса-Рихтмайера

Как видно из теорем 1 и 2 условия сходимости и устойчивости одни и те же. Кроме этого имеет место очевидное сходство между оценками (25) и (33). На основании этого сформулирована:

Теорема эквивалентности Лакса-Рихтмайера. *Из аппроксимации и устойчивости схемы вытекает ее сходимость.*

Доказательство. Аппроксимация схемы характеризуется погрешностью $\psi^n = \psi(x, t_n)$. Из устойчивости схемы следует оценка типа (33). Например, в сходном с (33) неравенстве производим очевидную замену $\hat{Z}^{k+1} \rightarrow Z^{k+1}, \delta^n \rightarrow \psi^n, \varepsilon \rightarrow Z^0 = 0$, тем самым устанавливаем неравенства типа (25)

$$\|Z^{k+1}\| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^n\|, k=0,1,\dots,N_\tau - 1,$$

откуда вытекает сходимость схемы.

Замечание. Теорема Лакса-Рихтмайера справедлива только для линейных уравнений типа вышеприведенных. Для нелинейных

уравнений данная теорема используется как приближение.

§4. Явная схема уравнения теплопроводности

Возьмем одномерное уравнение теплопроводности твердого

тела или неподвижного газа $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Для этого

уравнения явная схема есть $\rho c T_t^n = \lambda T_{xx}^n$.

Сопоставляя с вышеизложенным $\Phi = T, a^2 = \lambda / \rho c, u = 0, f = 0$, воспользуемся результатами теорем 1 и 2. Тогда условия сходимости и устойчивости примут вид:

$$\text{A) } [1 - \tau_{n+1} (\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}})] \geq 0, \quad \text{B) } \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} \geq 0,$$

$$\text{C) } \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} \geq 0; \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$$

В условиях B), C) нет необходимости, они выполняются всегда, а из условия A) вытекает ограничение на шаг по времени

$$\tau_{n+1} \leq \frac{1}{a^2 (\frac{1}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} + \frac{1}{h_{xi} \hbar_{xi}})}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad (34)$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ условие (34) имеет вид

$$\tau_{n+1} \leq \frac{h_x^2}{2a^2} \quad (35)$$

§5. Явные схемы одномерного уравнения диффузии

В одномерном течении в направлении x со скоростью u диффузия в газе или жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

При сопоставлении имеем $\Phi = C, a^2 = D, f = 0$. Теоремы 1 и 2 дают следующие условия сходимости и устойчивости явных схем для уравнения диффузии с конвективным переносом

$$\text{A) } [1 - \tau_{n+1} \left(\frac{D}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{D}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \geq 0,$$

$$\text{B) } \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, \quad \text{C) } \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0;$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1.$$

Здесь выполнение двух последних условий B), C) просто необходимо, иначе при их невыполнении получается неправильное пилообразное решение. Условия B), C) ставят ограничения сверху на пространственные шаги сетки:

$$\hbar_{xi} \leq \frac{D}{\beta u_i^n}, \quad \hbar_{xi} \leq \frac{D}{-\alpha u_i^n}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (36)$$

Условие A) ограничивает сверху шаг по времени

$$\tau_{n+1} \leq \left(\frac{D}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{D}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)^{-1} i = 1, \dots, N_x - 1, \quad (37)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$$

§6. Схема с центральной разностью для конвективного члена уравнения Бюргерса

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x^2}$$

схема с центральной разностью имеет вид

$$\frac{\mathfrak{R}_i^{n+1} - \mathfrak{R}_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n \left[\frac{\mathfrak{R}_{i+1}^n - \mathfrak{R}_{i-1}^n}{2h_x} \right] = \nu \left(\frac{\mathfrak{R}_{i+1}^n - 2\mathfrak{R}_i^n + \mathfrak{R}_{i-1}^n}{h_x^2} \right),$$

$$\mathfrak{R}_i^0 = d_i, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1,$$

$$\mathfrak{R}_0^n = \varphi_0^n, \quad \mathfrak{R}_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau$$

Здесь $\frac{\mathfrak{R}_{i+1}^n - \mathfrak{R}_{i-1}^n}{2h_x} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_i^n - \mathfrak{R}_{i-1}^n}{h_x} + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_{i+1}^n - \mathfrak{R}_i^n}{h_x}$, иначе, коэффициенты равны $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$, поэтому условия сходимости

и устойчивости вытекают из теорем 1 и 2 в виде

$$\text{A) } 1 - \frac{2\nu\tau_{n+1}}{h_x^2} \geq 0, \text{ B) } \frac{\nu}{h_x} - \frac{u_i^n}{2} \geq 0, \text{ C) } \frac{\nu}{h_x} + \frac{u_i^n}{2} \geq 0; i = 1, \dots, N_x - 1,$$

вследствие чего на шаги сеток возникают ограничения сверху

$$\tau_{n+1} \leq \frac{h_x^2}{2a^2}, \quad h_x \leq \frac{2\nu}{|u_i^n|} \quad i = 1, \dots, N_x - 1$$

Из последнего неравенства вытекает, что для устойчивости и сходимости «сеточное число Рейнольдса» не должно превосходить двух

$$\text{Re}_h = \frac{|u_i^n| h_x}{\nu} \leq 2, \quad i = 1, \dots, N_x - 1$$

Если «сеточное число Рейнольдса» больше 2

$\text{Re}_h = \frac{|u_i^n| h_x}{\nu} > 2, i = 1, \dots, N_x - 1,$ то схема становится немонотонной и получается неверное (пилообразное) решение.

§7. Явная схема с «аппроксимационной вязкостью»

Схема считается *оптимальной*, если число условий сходимости и устойчивости минимально. Нетрудно вычислить, что условия B), C) не дадут ограничений на пространственные шаги сетки, т.е. выполняются безусловно и в них нет надобности, если параметры α и β положить равными

$$\alpha = \frac{1 + \text{sign}(u_i^n)}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \text{sign}(u_i^n)}{2}$$

или в эквивалентной записи

$$\alpha = \frac{1 + |u_i^n| / u_i^n}{2}, \quad \beta = \frac{1 - |u_i^n| / u_i^n}{2}$$

После подстановки в схему получаются выражения

$$\alpha u_i^n = \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}, \quad \beta u_i^n = \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \quad (38)$$

Т.о. оптимальная явная схема 1-го порядка точности одномерного уравнения параболического типа запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} = \\ & = a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{xi}} + f_i^n, \quad (39) \\ & i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \end{aligned}$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau$$

Безындексная запись в разностных производных:

$$\begin{aligned} & \Phi_t^n + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \Phi_{\bar{x}}^n + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \Phi_x^n = a^2 \Phi_{xx}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}, \\ & \Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (40) \end{aligned}$$

Запись через разностные операторы:

$$\begin{aligned} & \frac{E\Phi^{n+1} - E\Phi^n}{\tau_{n+1}} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} = \\ & = a^2 \left(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{xi}} + Ef^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}, \\ & \Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (41) \end{aligned}$$

Из условий сходимости и устойчивости А), В), С) остается только условие А):

$$1 - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \bar{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| - |u_i^n|}{2h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \bar{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| + |u_i^n|}{2h_{xi}} \right) \geq 0, i = 1, \dots, N_x - 1,$$

потому что условия В), С) положительны всегда

$$\text{В)} \frac{a^2}{h_{xi+1} \bar{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| - |u_i^n|}{2h_{xi+1}} > 0, \text{ С)} \frac{a^2}{h_{xi} \bar{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| + |u_i^n|}{2h_{xi}} > 0; i = 1, \dots, N_x - 1,$$

иначе говоря, на пространственные шаги сетки $\bar{h}_{xi} = (h_{xi+1} + h_{xi})/2$ нет ограничений сверху. Однако (39) обладает «схемной вязкостью» и имеет 1-й порядок точности.

В оптимальной схеме (39) для конвективных членов использована аппроксимация *Булева-Петрищева*.

§8. Явная 2-го порядка точности схема без «аппроксимационной вязкости»

Построенная в §5 модуля-2 без «схемной вязкости» аппроксимация *Джакупова К.Б.* записывается с использованием дискретной функции сигнатуры

$$\begin{aligned}
 u_i^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n &= \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \right. & (42) \\
 &+ \frac{h_{xi}}{2} \left[\left(\frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1}^n - \Phi_{i-2}^n}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\Phi_{i+2}^n - \Phi_{i+1}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \left. \right\} + \\
 &+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \left\{ \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \right. \\
 &- \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\left(\frac{\Phi_{i+2}^n - \Phi_{i+1}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1}^n - \Phi_{i-2}^n}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \left. \right\} + O(\tilde{h}_{xi}^2) \equiv \\
 &\equiv \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \Phi_{x^0}^n + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \Phi_{x^0}^n + O(\tilde{h}_{xi}^2)
 \end{aligned}$$

На основании этого создана явная схема 2-го порядка точности с разностными конвективными членами, не содержащими «аппроксимационную вязкость»:

$$\begin{aligned}
 \Phi_t^n + \frac{u^n + |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n &= a^2 \Phi_{xx}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}, \\
 \Phi^0 &= d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n|_{S_h} = \phi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_t
 \end{aligned} \quad (43)$$

Условия сходимости и устойчивости явной схемы (43) накладывают ограничения на шаги по времени в следующем виде

$$\begin{aligned}
& 1 - \tau_{n+1} \left[\frac{a^2}{h_{xi+1} \tilde{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}} \left\{ 1 + \frac{h_{xi+1}}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h_{xi+1}^2}{h_{xi}} \frac{1}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right\} + \right. \\
& + \frac{a^2}{h_{xi} \tilde{h}_{xi}} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}} \left\{ 1 + \frac{h_{xi}}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h_{xi}^2}{h_{xi+1}} \frac{1}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} \right] \geq 0, i=1, \dots, N_x - 1, \\
& n=0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1
\end{aligned} \tag{44}$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ эти условия упрощаются

$$\left[1 - \tau_{n+1} \left(\frac{2a^2}{h_x^2} + \frac{3|u_i^n|}{2h_x} \right) \right] \geq 0, i=1, \dots, N_x - 1, n=0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \tag{45}$$

Сходимость и устойчивость схемы (43) исследована в [3] методом энергетических неравенств.

Для одномерного уравнения баланса энергий

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

аппроксимация «без схемной вязкости» имеет вид

$$\begin{aligned}
& \rho^n c_v \left(T_t^n + \frac{u^n + |u^n|}{2} T_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} T_{x^0}^n \right) = \\
& = \left((T_{+1} \lambda^n + \lambda^n) T_x^n \right)_{\bar{x}} / 2 - p^n u_x^n + 2/3 (u_x^n)^2, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}
\end{aligned}$$

§9. Некоторые сведения из теории линейных операторов.

Исследование устойчивости схем методом оценки нормы операторов перехода

Разностные операторы на самом деле являются квадратными матрицами. Поэтому при исследовании разностных схем широко используется теория линейных операторов (матриц). Пусть $A = \{a_{ik}\}, i=1, \dots, N, k=1, \dots, N\}, B = \{b_{ik}\}, i=1, \dots, N, k=1, \dots, N\}$ - суть квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1N} \\ \dots \dots \dots \\ a_{N1} \dots a_{NN} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1N} \\ \dots \dots \dots \\ b_{N1} \dots b_{NN} \end{pmatrix}$$

Нормы $\|A\|$ этих матриц даются в различных формах. В основном применяются две нормы, подчиненные вышеиспользованной максимум-норме сеточной функции:

$$\|A\|_I = \sup_i \sum_{k=1}^N |a_{ik}|, \quad \|A\|_{II} = \sup_k \sum_{i=1}^N |a_{ik}| \quad (46)$$

Эти нормы обладают следующими свойствами

$$\|A\| \geq 0, \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|\gamma A\| = |\gamma| \|A\|, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Также имеет место важное неравенство

$$\|A\vec{r}\| \leq \|A\| \|\vec{r}\|, \quad (47)$$

где \vec{r} -вектор:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_N \end{pmatrix}$$

Обозначим через R -пространство N -мерных векторов: $\vec{r} \in R$.

Подчиненная норма матрицы (оператора) определяется так:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\vec{r} \in R \\ \vec{r} \neq 0}} \frac{\|A\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \quad \text{или} \quad \|A\| = \sup_{\|\vec{r}\|=1} \|A\vec{r}\| \quad (48)$$

Лемма-1. Если для всех элементов пространства R выполняется неравенство $\|A\vec{r}\| \leq m \|\vec{r}\|$, $m = \text{const} > 0$, то имеет место оценка нормы сверху $\|A\| \leq m$.

Доказательство леммы дано в [7],[8]. Например, операторную запись схемы (4) приведем к следующей форме

$$E\Phi^{n+1} = E\Phi^n + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \Delta_{+1} \Phi^n - \\ - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \Delta_{-1} \Phi^n + \tau_{n+1} E f^n, \quad x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \quad (49)$$

Обозначим коэффициенты при $\Delta_{\pm 1}\Phi^n$

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}, \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \quad (50)$$

К этому же, операторную запись (41) приведем к форме

$$\begin{aligned} E\Phi^{n+1} = & E\Phi^n + \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}} \right) \Delta_{+1}\Phi^n - \\ & - \tau_{n+1} \left(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}} \right) \Delta_{-1}\Phi^n + \tau_{n+1} Ef^n \end{aligned} \quad (51)$$

Аналогичные обозначения применим и для оптимальной схемы

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}}, \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}}$$

В силу всего этого имеем право (49) и (51) записать в единообразном виде

$$E\Phi^{n+1} = E\Phi^n + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1}\Phi^n - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}\Phi^n + \tau_{n+1} Ef^n$$

или, после приведения подобных

$$E\Phi^{n+1} = (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1})\Phi^n + \tau_{n+1} Ef^n \quad (52)$$

Исходя из (52), оператор (матрица) $(E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1})$ есть оператор перехода со слоя времени с номером n на слой $n+1$. При выполнении условий сходимости и устойчивости В),С) коэффициенты (50) будут неотрицательными величинами

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0 \quad (53)$$

и условие А) сходимости и устойчивости примет вид

$$A) 1 - \tau_{n+1} (c_{+1}^n + c_{-1}^n) \geq 0, i = 1, \dots, N_x - 1, \quad (54)$$

Введем пространство H сеточных функций, принимающих в граничных узлах $x \in S_h$ нулевые значения. Например, данному пространству принадлежат, т.е. являются его элементами, погрешности схемы $Z^n = Z(x, t_n) \in H, n = 0, 1, \dots, N_\tau$, возмущения схемы $\hat{Z}^n = \hat{Z}(x, t_n) \in H, n = 0, 1, \dots, N_\tau$ также являются элемен-

тами пространства H . Для любой функции $\Psi \in H$ в силу (53), (54), т.е. при выполнении условий А),В),С) справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} & \| (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \Psi \| = \max_i | \Psi_i + \tau_{n+1} c_{+i}^n \Delta_{+1} \Psi - \tau_{n+1} c_{-i}^n \Delta_{-1} \Psi | \leq \\ & \leq \max_i \{ (1 - \tau_{n+1} c_{+i}^n - \tau_{n+1} c_{-i}^n) | \Psi_i | + \tau_{n+1} c_{+i}^n | T_{+1} \Psi | + \tau_{n+1} c_{-i}^n | T_{-1} \Psi | \} \leq \\ & \leq \max_i \{ (1 - \tau_{n+1} c_{+i}^n - \tau_{n+1} c_{-i}^n) \| \Psi \| + \tau_{n+1} c_{+i}^n \| \Psi \| + \tau_{n+1} c_{-i}^n \| \Psi \| \} = 1^* \| \Psi \|, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\| (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \Psi \| \leq 1 \cdot \| \Psi \|$$

По лемме-1 ($m=1$) находим, что норма оператора перехода не превосходит 1:

$$\| E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1} \| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (55)$$

В дальнейшем, для компактной записи введем оператор $\Lambda_1^n = c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}$, тогда (55) примет вид

$$\| E + \tau_{n+1} \Lambda_1^n \| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (55^*)$$

и явная схема запишется кратко:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\tau_{n+1}} = \Lambda_1^n \Phi^n + f^n, \quad x \in \Omega_h, \quad t \in \Omega_{t0},$$

$$\Phi^0 = d(x), \quad x \in \Omega_h, \quad \Phi^n |_{S_h} = \varphi^n(x), \quad x \in S_h, \quad t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Покажем применение оценки (55) при исследовании устойчивости схемы. С этой целью (30) приводится к виду

$$E \hat{Z}^{n+1} = (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n + \tau_{n+1} E \delta^n$$

По свойству единичного оператора $E \hat{Z}^{n+1} = \hat{Z}^n, E \delta^n = \delta^n$.

Поэтому имеет место

$$\hat{Z}^{n+1} = (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n + \tau_{n+1} \delta^n$$

Беря по норме от обеих частей (30), переходим к неравенствам

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| = \| (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n + \tau_{n+1} \delta^n \| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \| (E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n \| + \| \tau_{n+1} \delta^n \| \leq \\ &\leq \| E + \tau_{n+1} c_{+1}^n \Delta_{+1} - \tau_{n+1} c_{-1}^n \Delta_{-1} \| \| \hat{Z}^n \| + \tau_{n+1} \| \delta^n \| \end{aligned} \quad (56)$$

При выполнении условий А), В), С) выполняется и (55). Следовательно, из (56) получаются неравенства

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \leq \| \hat{Z}^n \| + \tau_{n+1} \| \delta^n \|, \quad n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1,$$

из которых вытекает доказательство устойчивости

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \leq \| \varepsilon \| + \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \| \delta^n \|, \quad k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1,$$

что совпадает с (33).

§10. Неявные схемы

Принцип конструирования неявных схем совершенно аналогичен явным схемам, лишь производная по времени аппроксимируется разностью назад:

Индексная запись неявных схем имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi_i^n - \Phi_i^{n-1}}{\tau_n} + u_i^n \left[\alpha \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} \right] = \\ &= a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\hbar_{xi}} + f_i^n, \quad \alpha + \beta = 1, \\ &\quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 1, 2, \dots, N_\tau, \end{aligned}$$

$$\Phi_i^0 = d_i, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad \Phi_0^n = \varphi_0^n, \quad \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau, \quad (57)$$

Безындексная запись через разностные производные:

$$\begin{aligned} &\Phi_{\bar{i}}^n + u^n \left[\alpha \Phi_{\bar{x}}^n + \beta \Phi_x^n \right] = a^2 \Phi_{x\bar{x}}^n + f^n, \quad x \in \Omega_h, \quad t \in \Omega_{t1}, \\ &\Phi^0 = d(x), \quad x \in \Omega_h, \quad \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x), \quad x \in S_h, \quad t \in \bar{\Omega}_\tau \end{aligned} \quad (58)$$

Запись в разностных операторах:

$$\begin{aligned} &\frac{E\Phi^n - E\Phi^{n-1}}{\tau_n} + u_i^n \left[\alpha \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} \right] = \\ &= a^2 \left(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\hbar_{xi}} + Ef^n, \quad \alpha + \beta = 1, \quad x \in \Omega_h, \quad t \in \Omega_{t1}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Запись с помощью оператора $\Lambda_1^n = c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}$:

$$\frac{\Phi^n - \Phi^{n-1}}{\tau_n} = \Lambda_1^n \Phi^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Аппроксимация. Вводится погрешность схемы

$$Z^n(x) = \Phi^n(x) - \overline{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau,$$

для которой получается разностная аналогичная задача

$$Z_i^n + u^n [\alpha Z_{\bar{x}}^n + \beta Z_x^n] = a^2 Z_{xx}^n + \psi^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$Z^0 = 0, x \in \Omega_h, Z^n \Big|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \quad (60)$$

Согласно вышеизложенному погрешность аппроксимации будет равна

$$\begin{aligned} \psi^n(x) &= a^2 \overline{\Phi}_{xx}^n - \overline{\Phi}_i^n - u^n [\alpha \overline{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta \overline{\Phi}_x^n] + f^n = \\ &= O(\tau_{n+1}) + O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + \\ &+ O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1} \end{aligned}$$

Теорема-3 (теорема о сходимости). Неявные схемы (57) сходятся со скоростью

$$O(\tau_{n+1}) + O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2)$$

При выполнении следующих условий:

$$B) \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, C) \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0, i = 1, \dots, N_x - 1,$$

$$n = 1, 2, \dots, N_\tau.$$

Доказательство. Приведя (60) к индексной записи, произведем соответствующую группировку членов

$$[1 + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] Z_i^n = Z_i^{n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) Z_{i-1}^n + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) Z_{i+1}^n + \tau_n \psi_i^n, \\
& \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \quad (61)
\end{aligned}$$

$$Z_i^0 = 0, i = 1, \dots, N_x - 1, Z_0^n = 0, Z_{N_x}^n = 0, n = 0, 1, \dots, N_\tau$$

Взяв по модулю от обеих частей (61), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}
& | [1 + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] Z_i^n | \leq | Z_i^{n-1} | + \\
& + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) | Z_{i-1}^n | + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) | Z_{i+1}^n | + \tau_n \psi_i^n \leq \\
& \leq | Z_i^{n-1} | + | \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) | | Z_{i-1}^n | + | \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) | | Z_{i+1}^n | + | \tau_n \psi_i^n |, \\
& \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (62)
\end{aligned}$$

При выполнении условий В), С) теоремы и в силу $\tau_{n+1} > 0$ знаки модулей в (62) опускаются и совершается переход неравенствам

$$\begin{aligned}
& [1 + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] | Z_i^n | \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_i^{n-1} | + \\
& + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_{i-1}^n | + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_{i+1}^n | + \\
& + \tau_n \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | \psi_i^n |, \alpha + \beta = 1, i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1 \quad (63)
\end{aligned}$$

Нулевые краевые условия (60) приводят к неравенствам

$$\max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_{i-1}^n | \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_i^n | = \| Z^n \|, \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_{i+1}^n | \leq \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} | Z_i^n | = \| Z^n \|, \forall n$$

Неравенства (63) выполняются для всех номеров $i = 1, \dots, N_x - 1$, поэтому среди них найдется такой номер $i = i^*$, где достигается максимум модуля $| Z_{i^*}^n | = \| Z^n \|$:

$$[1 + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right)] \| Z^n \| \leq \| Z^{n-1} \| +$$

$$+ \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi} \bar{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \right) \| Z^n \| + \tau_n \left(\frac{a^2}{h_{xi+1} \bar{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \right) \| Z^n \| + \tau_n \| \psi^n \|,$$

$$i = i^*, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$$

После сокращений получается

$$\| Z^n \| \leq \| Z^{n-1} \| + \tau_n \| \psi^n \|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

$$\| Z^k \| \leq \bar{t} \max_{1 \leq n \leq N_\tau} \| \psi^n \|, k = 1, \dots, N_\tau,$$

где

$$\| \psi^n \| = O(\tau_{n+1}) + \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} [O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\bar{h}_{xi}^2)] +$$

$$+ O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \bar{h}_{xi}^2) \rightarrow 0, \text{ при } \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Поэтому погрешность схемы стремится к нулю, откуда вытекает сходимость

$$\| Z^{k+1} \| = \| \Phi^{k+1} - \bar{\Phi}^{k+1} \| \rightarrow 0, \Phi^{k+1} \rightarrow \bar{\Phi}^{k+1}$$

Теорема доказана.

§11. Абсолютно устойчивые неявные схемы

В неявных схемах для возмущения получается разностная задача, аналогичная задаче (60):

$$\hat{Z}_i^n + u^n [\alpha \hat{Z}_{\bar{x}}^n + \beta \hat{Z}_x^n] = a^2 \hat{Z}_{xx}^n + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\hat{Z}^0 = \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{Z}^n \Big|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau$$

При выполнении условий В), С) получаются неравенства

$$\| \hat{Z}^k \| \leq \varepsilon \| + \bar{t} \max_{1 \leq n \leq N_\tau} \| \delta^n \|, k = 1, \dots, N_\tau$$

откуда по определению вытекает устойчивость схемы. Для доказательства этого покажем, что норма оператора перехода не превосходит 1 при выполнении условий В), С).

Лемма-2. *Если для всех элементов пространства R выполняется неравенство $\| A\bar{r} \| \geq \| \bar{r} \|$, то норма обратной матрицы не превосходит 1: $\| A^{-1} \| \leq 1$.*

Доказательство леммы в более общем виде дано в /7/, /8/.

Запишем уравнение для возмущений в операторном виде

$$(E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n = \hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n, \quad (63a)$$

где оператор перехода равен $(E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})$. При оценке нормы обратного этому оператору, используются ниже следующие неравенства, справедливые для произвольного $\Psi \in H$ при выполнении условий В), С). Выберем узел с номером $i = i^*$ (таких номеров может быть несколько), в котором достигается максимум модуля $|\Psi_{i^*}|$: $|\Psi_{i^*}| = \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} |\Psi_i| = \|\Psi\|$.

Далее следуют, если $\Psi_{i^*} \geq 0$, то выполняются неравенства

$$(\Delta_{+1} \Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*+1} - \Psi_{i^*} \leq 0, (\Delta_{-1} \Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*} - \Psi_{i^*-1} \geq 0,$$

если $\Psi_{i^*} \leq 0$, справедливы следующие неравенства

$$(\Delta_{+1} \Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*+1} - \Psi_{i^*} \geq 0, (\Delta_{-1} \Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*} - \Psi_{i^*-1} \leq 0$$

На основании этого и в силу выполнения по условиям В), С) неотрицательности коэффициентов $c_{+1}^n \geq 0, c_{-1}^n \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|(E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1}) \Psi\| &= \max_i |\Psi_i - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} \Psi + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1} \Psi| \geq \\ &\geq |\Psi_{i^*}| = \max_i |\Psi_i| = \|\Psi\|, \end{aligned}$$

следовательно, по лемме-2 норма обратного оператора не превосходит 1

$$\|(E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1}\| \leq 1, \text{ ч. м. д.} \quad (63б)$$

Подействуем на обе части (63а) обратным оператором

$$\begin{aligned} (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1}) \hat{Z}^n &= \\ = (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} (\hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\hat{Z}^n = (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} (\hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n), \quad (63в)$$

потому как

$$(E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1}) = E$$

Беря по норме от обеих частей (63в), учтем (63б)

$$\begin{aligned}
\| \hat{Z}^n \| &= \| (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} (\hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n) \| \leq \\
&\leq \| (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} \| \| (\hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n) \| \leq \\
&\leq 1 * \| \hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n \| \leq \| \hat{Z}^{n-1} \| + \tau_n \| \delta^n \|
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\| \hat{Z}^n \| \leq \| \hat{Z}^{n-1} \| + \tau_n \| \delta^n \|, n = 1, \dots, N_\tau$$

В силу чего доказывается устойчивость неявных схем

$$\| \hat{Z}^k \| \leq \| \varepsilon \| + \bar{\tau} \max_{1 \leq n \leq N_\tau} \| \delta^n \|, k = 1, \dots, N_\tau$$

при выполнении условий В), С). Т.о. доказана следующая **Теорема-4 (теорема об устойчивости)**. Неявные схемы (57) устойчивы при выполнении условий:

$$\begin{aligned}
\text{В)} \frac{a^2}{h_{xi+1} \bar{h}_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0, \text{ С)} \frac{a^2}{h_{xi} \bar{h}_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0, i = 1, \dots, N_x - 1, \\
n = 1, 2, \dots, N_\tau.
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что условия В), С) имели место и в явных схемах, в неявных схемах ликвидировано только условие А) на шаги по времени.

В теореме о сходимости (теорема 3) и теореме об устойчивости (теорема-4) условия В), С) для произвольных параметров $\alpha, \beta = 1 - \alpha$ вызывают ограничения на пространственные шаги сетки в виде (36). Нет ограничений на пространственные шаги только для таких параметров, которые удовлетворяют равенства

$$\alpha u_i^n = \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}, \beta u_i^n = \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}$$

При этих соотношениях В), С) выполняются автоматически, т.е. безусловно. В результате получаем абсолютно устойчивую и абсолютно сходящуюся неявную схему

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_i^n - \Phi_i^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} = \\
= a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{2}{h_{xi+1} + h_{xi}} + f_i^n,
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, n = 1, 2, \dots, N_\tau,$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau,$$

Безындексная запись в разностных производных:

$$\Phi_i^n + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \Phi_{\bar{x}}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_x^n = a^2 \Phi_{xx}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (64)$$

Но схема (64) обладает «**аппроксимационной вязкостью**». Неявная схема, подобная схемам (43) и (64) и **не имеющая «аппроксимационной вязкости»**

$$\frac{\Phi^n - \Phi^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n = a^2 \Phi_{xx}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (65)$$

безусловно устойчива. Для одномерного уравнения баланса энергий

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

аналогичная неявная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \rho^n c_v \left(\frac{T^n - T^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} T_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} T_{x^0}^n \right) = \\ & = ((T_{+1} \lambda^n + \lambda^n) T_x^n) / 2 - p^n u_{\bar{x}}^n + 2/3 (u_{\bar{x}}^n)^2, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1}, \end{aligned}$$

§12. Монотонные схемы. Алгоритмы решения

С целью вычислений $\Phi_i^n, i = 1, \dots, N_x - 1$ из неявных разностных уравнений (57) применяется метод трехточечной прогонки /6/, /9/, /11/, для вычислений $\Phi_i^n, i = 1, \dots, N_x - 1$ из неявных разностных уравнений «без схемной вязкости» (65) применяется метод пятиточечной прогонки /9/, /10/. В методе трехточечной прогонки уравнения (57) приводятся к следующему виду

$$A_i \Phi_{i-1}^n - B_i^n \Phi_i^n + C_i \Phi_{i+1}^n = D_i, i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad (66)$$

решение которых ищется в виде

$$\Phi_i^n = X_i \Phi_{i+1}^n + Y_i, i = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 1, 0 \quad (67)$$

Взяв (67) в точке $i - 1$, подставим $\Phi_{i-1}^n = X_{i-1} \Phi_i^n + Y_{i-1}$ в (66)

$$A_i (X_{i-1} \Phi_i^n + Y_{i-1}) - B_i^n \Phi_i^n + C_i \Phi_{i+1}^n = D_i, \\ \Phi_i^n = \frac{C_i}{B_i - A_i X_{i-1}} \Phi_{i+1}^n + \frac{A_i Y_{i-1} - D_i}{B_i - A_i X_{i-1}} \quad (68)$$

Левые части (68) и (67) совпадают, поэтому должны быть равны соответствующие коэффициенты в правой части

$$X_i = \frac{C_i}{B_i - A_i X_{i-1}}, Y_i = \frac{A_i Y_{i-1} - D_i}{B_i - A_i X_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (69)$$

В (67) при $i=0$ стоит $\Phi_0^n = \varphi_0^n$, следовательно, имеем равенство $\Phi_0^n = X_0 \Phi_1^n + Y_0 = \varphi_0^n$, откуда вытекают начальные значения прогоночных коэффициентов (69) $X_0=0, Y_0 = \varphi_0^n$ и по рекуррентным формулам (69) вычисляются все $X_i, Y_i, i = 1, 2, \dots, N_x - 1$, затем из (67), используя правое краевое условие $\Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n$ находим все искомые $\Phi_i^n, i = 1, \dots, N_x - 1$.

Счет по формулам прямой прогонки (69) будет устойчивым при выполнении условий /6/:

$$|A_i| + |C_i| \leq |B_i| \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (70)$$

В неявных схемах (57) коэффициенты равны

$$A_i = \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}, \quad C_i = \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}, \quad (71) \\ B_i = \frac{1}{\tau_n} + \frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi+1}}, \quad D_i = -\frac{1}{\tau_n} \Phi_i^{n-1}$$

Из (71) следует $B_i = \frac{1}{\tau_n} + A_i + C_i$.

Схемы, в которых выполняются условия устойчивости прогонок (70), называются *монотонными схемами*, если данные

условия не выполняются, *немонотонными*. Поэтому, вышеисследованные схемы, удовлетворяющие условиям В), С), являются монотонными, схемы, не удовлетворяющие условиям В), С) будут немонотонными схемами. Вычисления по немонотонным схемам приводят к неправильным результатам, потому как такие схемы являются несходящимися.

Для применения метода пятиточечных прогонок схема (65) группируется в следующем виде

$$A_i \Phi_{i-2}^n + B_i \Phi_{i-1}^n + C_i \Phi_i^n + D_i \Phi_{i+1}^n + E_i \Phi_{i+2}^n = F_i, i=1,2,\dots,N_x-1, \quad (72)$$

где $E_{N_x-1} = 0$, $A_1 = 0$, потому как в схему не входят заграничные значения $\Phi_{N_x+1}^n, \Phi_{-1}^n$.

Решение уравнений (72) ищется в виде

$$\Phi_i^n = X_i \Phi_{i+1}^n + Y_i \Phi_{i+2}^n + Z_i, i = N_x - 2, \dots, 1, 0, \quad (73)$$

откуда вытекают нужные формулы

$$\Phi_{i-1}^n = X_{i-1} \Phi_i^n + Y_{i-1} \Phi_{i+1}^n + Z_{i-1}, \Phi_{i-2}^n = X_{i-2} \Phi_{i-1}^n + Y_{i-2} \Phi_i^n + Z_{i-2},$$

которые подставляются в (63)

$$A_i [X_{i-2} (X_{i-1} \Phi_i^n + Y_{i-1} \Phi_{i+1}^n + Z_{i-1}) + Y_{i-2} \Phi_i^n + Z_{i-2}] + \\ + B_i (X_{i-1} \Phi_i^n + Y_{i-1} \Phi_{i+1}^n + Z_{i-1}) + C_i \Phi_i^n + D_i \Phi_{i+1}^n + E_i \Phi_{i+2}^n = F_i$$

Группируем

$$\Phi_i^n = - \frac{D_i + B_i Y_{i-1} + A_i X_{i-2} Y_{i-1}}{C_i + A_i X_{i-2} X_{i-1} + A_i Y_{i-2} + B_i X_{i-1}} \cdot \Phi_{i+1}^n - \\ - \frac{E_i}{C_i + A_i X_{i-2} X_{i-1} + A_i Y_{i-2} + B_i X_{i-1}} \cdot \Phi_{i+2}^n + \\ + \frac{F_i - B_i Z_{i-1} - A_i X_{i-2} Z_{i-1} - A_i Z_{i-2}}{C_i + A_i X_{i-2} X_{i-1} + A_i Y_{i-2} + B_i X_{i-1}} \quad (74)$$

Сравнивая (74) с (73), получаем рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов

$$X_i = - \frac{D_i + (B_i + A_i X_{i-2}) Y_{i-1}}{C_i + (A_i X_{i-2} + B_i) X_{i-1} + A_i Y_{i-2}}, Y_i = \frac{-E_i}{C_i + (A_i X_{i-2} + B_i) X_{i-1} + A_i Y_{i-2}},$$

$$Z_i = \frac{F_i - (B_i + A_i X_{i-2})Z_{i-1} - A_i Z_{i-2}}{C_i + (A_i X_{i-2} + B_i)X_{i-1} + A_i Y_{i-2}}, \quad i = 2, \dots, N_x - 1 \quad (75)$$

Для вычислений по формулам (75) необходимо знать начальные значения: $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1$.

Полагая $i=0$ в (73), находим

$$\Phi_0^n = X_0 \Phi_1^n + Y_0 \Phi_2^n + Z_0, \quad (76)$$

откуда получается $X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = \Phi_0^n$. Записав (72) и (73)

при $i = 1$ и, имея в виду $A_1 = 0$, приходим к системе

$$B_1 \Phi_0^n + C_1 \Phi_1^n + D_1 \Phi_2^n + E_1 \Phi_3^n = F_1, \quad (77)$$

$$\Phi_1^n = X_1 \Phi_2^n + Y_1 \Phi_3^n + Z_1 \quad (78)$$

Преобразовав (77) к виду

$$\Phi_1^n = -\frac{D_1}{C_1} \Phi_2^n - \frac{E_1}{C_1} \Phi_3^n + \frac{F_1 - B_1 \Phi_0^n}{C_1}$$

и сравнивая с (78), находим

$$X_1 = -\frac{D_1}{C_1}, \quad Y_1 = -\frac{E_1}{C_1}, \quad Z_1 = \frac{F_1 - B_1 \Phi_0^n}{C_1} \quad (79)$$

Для обратной прогонки (73) необходимо предварительно вычислить $\Phi_{N_x-1}^n$, ибо правое краевое условие дает только $\Phi_{N_x}^n = \phi_{N_x}^n$. Т.к. $E_{N_x-1} = 0$, то $Y_{N_x-1} = 0$. На основании этого вычисляется искомое значение

$$\Phi_{N_x-1}^n = X_{N_x-1} \Phi_{N_x}^n + Z_{N_x-1}$$

При выполнении условий /10/:

$$|A_i + B_i| + |D_i + E_i| \leq |C_i| \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (80)$$

счет по формулам пятиточечной прогонки будет устойчив. В схеме (65) коэффициенты (72) равны:

$$A_i = \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \frac{h_{xi}}{2h_{xi-1}} \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} + \\ + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \frac{h_{xi+1}}{2} \frac{1}{h_{xi-1}} \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2};$$

$$\begin{aligned}
B_i &= -\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \left[\left(\frac{1}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \right\} - \\
&- \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\left(\frac{1}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \right\} - \\
&- \frac{a^2}{h_{xi} \tilde{h}_{xi}}; C_i = \frac{1}{\tau_n} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \left[\frac{1}{h_{xi}} \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{h_{xi+1}} \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \right\} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_{xi+1}} + \right. \\
&+ \left. \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\left(\frac{1}{h_{xi+1}} \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{h_{xi}} \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \right\} + \frac{a^2}{h_{xi} \tilde{h}_{xi}} + \frac{a^2}{h_{xi+1} \tilde{h}_{xi}}; \\
D_i &= -\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{h_{xi}}{2} \left[\left(\frac{1}{h_{xi+2}} + \frac{1}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \right\} - \\
&- \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\left(\frac{1}{h_{xi+2}} + \frac{1}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \right\} - \\
&- \frac{a^2}{h_{xi+1} \tilde{h}_{xi}}; E_i = \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{h_{xi}}{2} \left[\frac{1}{h_{xi+2}} \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \right\} + \\
&+ \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\frac{1}{h_{xi+2}} \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \right\}; \\
F_i &= \frac{\Phi_i^{n-1}}{\tau_n} + f_i^n
\end{aligned}$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ они упрощаются:

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{2h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{2h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right\}, \\
B_i &= -\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_x} + \frac{1}{h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right\} - \frac{a^2}{h_x^2}, \\
C_i &= \frac{1}{\tau_n} + \frac{3}{2h_x} |u_i^n| + \frac{2a^2}{h_x^2}, \quad D_i = -\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} - \\
& D_i = -\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} - \\
& -\frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{h_x} + \frac{1}{h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right\} - \frac{a^2}{h_x^2}, \\
E_i &= \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{2h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right\} + \\
& + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} \left\{ \frac{1}{2h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right\}, \quad F_i = \frac{\Phi_i^{n-1}}{\tau_n} + f_i^n
\end{aligned}$$

§13. Схемы при краевых условиях фон Неймана

Краевое условие типа $\Phi|_S = \varphi(x, t)$ в общем случае называется условием *Дирихле* или краевым условием 1-го рода. Задачи физики, в которых на границе задаются потоки (например, потоки тепла, потоки концентрации инородной субстанции), приводят к краевым условиям типа *фон Неймана* (краевое условие 2-го рода):

$$\left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \gamma \Phi \right) \Big|_S = \varphi,$$

здесь n означает нормальное к границе области направление. В одномерной задаче (1) $n = x$. Пусть условие *фон Неймана* задана на левой границе, где $i = 0$. В этом случае простейшая аппроксимация для него имеет вид

$$\left(\lambda \frac{\Phi_1^n - \Phi_0^n}{h_{x1}} + \gamma \Phi_0^n \right) \Big|_{S_h} = \varphi_0^n,$$

откуда в явных схемах вычисляется граничное значение

$$\Phi_0^n = (\varphi_0^n - \lambda \frac{\Phi_1^n}{h_{x1}}) / (\gamma - \frac{\lambda}{h_{x1}})$$

В неявных схемах из этого выражения определяются начальные значения прогоночных коэффициентов. Например, в методе трехточечной прогонки они равны

$$X_0 = -\frac{\lambda}{h_{x1}} / (\gamma - \frac{\lambda}{h_{x1}}), Y_0 = \varphi_0^n / (\gamma - \frac{\lambda}{h_{x1}})$$

Аналогично и в пятиточечных прогонках. Пусть краевое условие 2-го рода имеет место на правой границе с индексом $i = N$.

Простейшая аппроксимация 1-го порядка точности для него

$$\left(\lambda \frac{\Phi_{N_x}^n - \Phi_{N_x-1}^n}{h_{x1}} + \gamma \Phi_{N_x}^n \right) \Big|_{S_h} = \varphi_{N_x}^n,$$

откуда в явных схемах вычисляется граничное значение

$$\Phi_{N_x}^n = (\varphi_{N_x}^n + \lambda \frac{\Phi_{N_x-1}^n}{h_{x1}}) / (\gamma + \frac{\lambda}{h_{x1}})$$

В неявных схемах это выражение используется для организации обратной прогонки. Выражение

$$\Phi_{N_x-1}^n = X_{N_x-1} \Phi_{N_x}^n + Y_{N_x-1},$$

подставляется в данную аппроксимацию

$$\Phi_{N_x}^n = (\varphi_{N_x}^n + \lambda \frac{X_{N_x-1} \Phi_{N_x}^n + Y_{N_x-1}}{h_{xN_x}}) / (\gamma + \frac{\lambda}{h_{xN_x}})$$

после чего вычисляется необходимое для обратной прогонки значение

$$\Phi_{N_x}^n = (\varphi_{N_x}^n + \lambda \frac{Y_{N_x-1}}{h_{xN_x}}) / [(\gamma + \frac{\lambda}{h_{xN_x}}) - \lambda \frac{X_{N_x-1}}{h_{xN_x}}]$$

§14. Метод первого дифференциального приближения

Идея исследования свойств схем с помощью 1-го дифференциального приближения принадлежит академику *Н.Н.Яненко*.

Пусть уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

аппроксимируется схемой

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{h_x} = 0$$

Из разложений в ряды *Тейлора* получаются

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + O(\tau^2),$$

$$\frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{h_x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{h_x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + O(h_x^2)$$

Данные выражения подставляются в вышенаписанную схему

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + O(\tau^2) + c \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{h_x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + O(h_x^2)\right] = 0$$

Из уравнения переноса следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n = -\frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial u}{\partial x}\right)^n = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n = \\ &= -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}\right)^n = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n \end{aligned}$$

Первым дифференциальным приближением называется выражение, где удержаны производные из рядов *Тейлора*:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + c \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{h_x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n\right] = 0,$$

получающееся после отбрасывания погрешности $O(\tau^2) + O(h_x^2)$.

Исследуем свойства полученного уравнения. Сделаем замену

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau}{2} c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + c \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{h_x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n\right] = 0,$$

откуда вытекает

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n = -\frac{1}{2} (\tau c^2 + c h_x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n$$

Потребуем, чтобы это уравнение стало *параболического типа*.

Для этого необходимо выполнение неравенства

$$c(\tau c + h_x) \leq 0$$

В методе дифференциального приближения это неравенство берется за *условие устойчивости* вышенаписанной явной схемы. Исследуем возможности его выполнения. Если коэффициент переноса будет положительным $c > 0$, очевидно, данное неравенство не удовлетворяется ни при каких шагах сеток, поэтому схема работает только в случае отрицательного коэффициента переноса $c < 0$, но тогда должно быть $(\tau c + h_x) \geq 0$. Откуда условие устойчивости схемы берется в виде $1 \geq -\frac{\tau c}{h_x}$.

§15. Исследование устойчивости методом фон Неймана

Методом *фон Неймана* возможно исследование устойчивости разностных схем в следующих случаях /12/: 1) на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$; 2) коэффициенты уравнения постоянные числа; 3) в уравнении отсутствует свободный член. Например, для исследования устойчивости явных схем с параметрами

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n \left[\alpha \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} \right] = \\ & = a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + f_i^n, \alpha + \beta = 1, \\ & i = 1, \dots, N_x - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1, \end{aligned}$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau,$$

метод *фон Неймана* не годится.

Условия 1), 2), 3) метода *фон Неймана* выполняются для явной схемы уравнения теплопроводности в твердом теле

$$\rho c T_t = \lambda T_{xx}$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ данная схема примет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau_{n+1}} = a^2 \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right), \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (81)$$

В методе фон Неймана решение ищется в виде кусочка тригонометрического ряда

$$T_i^n = p^{(n)} e^{\bar{i} m h_x}, \quad \bar{i} = \sqrt{-1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (82)$$

Здесь p - коэффициент, (n) -показатель степени. Данное обстоятельство учитывается при подстановке (82) в (81):

$$\frac{p^{(n+1)} e^{\bar{i} m h_x} - p^{(n)} e^{\bar{i} m h_x}}{\tau_{n+1}} = a^2 \left(\frac{p^{(n)} e^{\bar{i} m (i+1) h_x} - 2p^{(n)} e^{\bar{i} m h_x} + p^{(n)} e^{\bar{i} m (i-1) h_x}}{h_x^2} \right),$$

После сокращений на $p^{(n)} e^{\bar{i} m h_x}$ имеем

$$\frac{p-1}{\tau_{n+1}} = a^2 \left(\frac{e^{\bar{i} m h_x} - 2 + e^{-\bar{i} m h_x}}{h_x^2} \right), \quad (83)$$

По представлению комплексных чисел имеет место

$$e^{\bar{i} m h_x} = \cos m h_x + \bar{i} \sin m h_x, \quad e^{-\bar{i} m h_x} = \cos m h_x - \bar{i} \sin m h_x$$

В силу чего в (83) мнимая часть исчезает

$$\frac{p-1}{\tau_{n+1}} = a^2 \left(\frac{2 \cos m h_x - 2}{h_x^2} \right), \quad (84)$$

Тригонометрическое соотношение

$$\sin \frac{m h_x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos m h_x}{2}},$$

подставленное в (84) дает

$$\frac{p-1}{\tau_{n+1}} = -\frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{m h_x}{2}, \quad p = 1 - \tau_{n+1} \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{m h_x}{2} \quad (85)$$

В методе фон Неймана для того чтобы погрешности вычислений не возрастали (при их бесконечном возрастании решение будет искажено) необходимо выполнение очевидного неравенства

$$|p| \leq 1 \quad (86)$$

Подставляя (85) в (86), получаем:

$$|p| = \left| 1 - \tau_{n+1} \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{m h_x}{2} \right| \leq 1 \quad (87)$$

В общем случае для выполнения (87) достаточно следующих неравенств

$$\tau_{n+1} \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} \leq 2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (88)$$

Максимальное значение синуса равно 1: $\max_m \sin^2 \frac{mh_x}{2} = 1$, в силу чего из (88) вытекает условие устойчивости явной схемы, совпадающее с ранее установленным (35): $\tau_{n+1} \leq \frac{h_x^2}{2a^2}$.

Из вышеизложенного очевидно, что метод фон Неймана не годится для доказательства сходимости схемы. Исследуем методом фон Неймана устойчивость неявной схемы

$$\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\tau_n} = a^2 \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right) \quad (89)$$

Для этого (82) подставляется в (89)

$$\frac{p^{(n)} e^{\bar{i}mh_x} - p^{(n-1)} e^{\bar{i}mh_x}}{\tau_n} = a^2 \left(\frac{p^{(n)} e^{\bar{i}m(i+1)h_x} - 2p^{(n)} e^{\bar{i}mh_x} + p^{(n)} e^{\bar{i}m(i-1)h_x}}{h_x^2} \right),$$

После сокращения на $p^{(n)} e^{\bar{i}mh_x}$ находим

$$\frac{1 - p^{-1}}{\tau_n} = a^2 \left(\frac{e^{\bar{i}mh_x} - 2 + e^{-\bar{i}mh_x}}{h_x^2} \right),$$

$$\frac{1 - p^{-1}}{\tau_n} = -\frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2}, \quad p^{-1} = 1 + \tau_n \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2},$$

откуда получается выражение

$$p = \left(1 + \tau_n \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} \right)^{-1} \leq 1 \quad (90)$$

Шаг по времени $\tau_n > 0$ положительный, поэтому неравенство (90) доказывает безусловную устойчивость неявной схемы.

§16. Схема («ромб») Дюфорта-Френкеля

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема

Дюфорта-Френкеля имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left(\frac{T_{i+1}^n - T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right), \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$$

После преобразований

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right) - \frac{a^2 \tau^2}{h_x^2} \frac{T_i^{n+1} - 2T_i^n + T_i^{n-1}}{\tau^2}$$

схема «ромб» условно аппроксимирует уравнение теплопроводности

$$\frac{a^2 \tau^2}{h_x^2} \frac{T_i^{n+1} - 2T_i^n + T_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{a^2 \tau^2}{h_x^2} \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n + O(\tau^2) \right]$$

Следовательно, погрешность аппроксимации равна

$$\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2) + O\left(\frac{a^2 \tau^2}{h_x^2}\right)$$

Для полной аппроксимации необходимо выполнение равенства

$$O\left(\frac{a^2 \tau^2}{h_x^2}\right) = O(h_x^2), \text{ откуда вытекает условие на шаг по времени}$$

$$a^2 \tau^2 = h_x^4, \tau \leq h_x^2 / a^2$$

При невыполнении этого неравенства схема Дюфорта-Френкеля аппроксимирует иное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \aleph^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad \aleph = \frac{a\tau}{h_x}$$

Схема Дюфорта-Френкеля безусловно устойчива, но условно аппроксимирует и требует задания двух начальных условий T_i^0 и $T_i^{-1}, i = 0, 1, \dots, N_x$. По методу фон Неймана получается

$$\text{соотношение} \quad p^2 - \frac{4r \cos mh_x}{1 + 2r} p + \frac{2r - 1}{2r + 1} = 0, r = \frac{a^2 \tau}{h_x^2}.$$

§17. Абсолютно неустойчивая схема (чехарда) Ричардсона

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема Ричардсона записывается так

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right),$$

Погрешность аппроксимации равна $\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2)$, т.е. схема 2-го порядка точности по всем переменным, однако она **абсолютно неустойчива**, что доказывается методом *фон Неймана*, по которому возникает дисперсионное соотношение

$$p^2 + (8r \sin^2 \frac{mh_x}{2})p - 1 = 0, \quad r = \frac{a^2\tau}{h_x^2}$$

§18. Схема Кранка-Николсона

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2} \right),$$

Погрешность аппроксимации равна $\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2)$.

Метод *фон Неймана* дает дисперсионное соотношение

$$p = (1 - 2r \sin^2 \frac{mh_x}{2}) / (1 + 2r \sin^2 \frac{mh_x}{2}), \quad r = \frac{a^2\tau}{h_x^2}, \quad |p| \leq 1$$

Схема *Кранка-Николсона* - неявная схема, абсолютно устойчивая $|p| \leq 1$, решение находится методом трехточечной прогонки.

§19. Технология построения монотонных схем

Аппроксимация *Булеева-Петрищева* имеет 1-й порядок точности $O(h_x)$. Эффективная методика построения монотонных однородных схем с более высоким порядком аппроксимации младших производных предложена *Джакуповым К.Б.* в /20/.

Рассматривается начально-краевая задача для одномерного уравнения с конвективным членом:

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f, \quad \omega|_{t=0} = d, \quad (1)$$

$$\omega(0, t) = \varphi_1(t), \quad \omega(a, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \in [0, T]$$

Технология /1/ заключается в использовании решения самого уравнения (1) следующим образом. Имеет место схема

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(h_{xi}^2) \right] + \quad (2)$$

$$+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(h_{xi}^2) \right] = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \bar{f}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho}, \bar{f} = \frac{f}{\rho}$$

В (2) делается замена из (1) $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{1}{\bar{\mu}} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} - \bar{f} \right\}$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \frac{1}{\bar{\mu}} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} - \bar{f} \right\} + O(h_{xi}^2) \right] + \quad (3)$$

$$+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2} \frac{1}{\bar{\mu}} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} - \bar{f} \right\} + O(h_{xi+1}^2) \right] = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \bar{f},$$

после чего в (3) используются аппроксимации

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\tau_{n+1}} + O(\tau_{n+1}) \equiv \omega_t^n + O(\tau_{n+1}),$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + O(h_{xi}) \right] + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} + O(h_{xi+1}) \right], \quad (4)$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{2\bar{\mu}}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) + O(\bar{\mu}(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(\bar{\mu}h_{xi}^2)$$

Приведением подобных членов получаем явную схему 2 порядка погрешности аппроксимации конвективного члена

$$\rho(\omega_t^n + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}}) =$$

$$= \frac{\mu}{1 + \frac{\rho}{2\mu} \left(\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} h_{xi} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} h_{xi+1} \right)} \left(\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + f_i^n, \quad (5)$$

В (4) стоит аппроксимация 1 порядка. По этой же технологии, используя в (3) вместо (4) аппроксимацию 2 порядка

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(h_{xi}^2) \right] + \quad (6)$$

$$+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(h_{xi+1}^2) \right],$$

далее, подставляя $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} - \bar{f} \right\}$ в (6) и приводя подобные члены, получаем схемы

$$\rho(\omega_i^n + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}}) = \quad (7)$$

$$= \frac{\mu}{\sum_{k=0}^M \left[\frac{\rho}{2\mu} \left(\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} h_{xi} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} h_{xi+1} \right) \right]^k} \omega_{xx}^n + f_i^n,$$

$$\omega_i^0 = d_i, i = 1, \dots, N_x - 1, \omega_0^n = \varphi_1^n, \omega_{N_x}^n = \varphi_2^n, \forall n, M = 0, 1, 2, \dots,$$

которые при $\omega_i^n \equiv (\omega_i^{n+1} - \omega_i^n) / \tau$ являются явными схемами, сходящимися и устойчивыми в сеточной норме C при выполнении условий

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}} - \left[\rho \left(\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\sum_{k=0}^M \left[\frac{\rho}{2\mu} \left(\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} h_{xi} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} h_{xi+1} \right) \right]^k} \frac{1}{h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) \right] \geq 0, \forall (i, n),$$

при $\omega_i^n \equiv (\omega_i^n - \omega_i^{n-1}) / \tau$ являются неявными схемами, безусловно сходящимися и абсолютно устойчивыми в той же норме C .

Погрешность схемы (7) зависит от $M \geq 0$. При $M = 0$ схема (7) имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-й порядок точности и известна как схема *Булева-Петрищева*.

Для $M = 1$ имеет 2-й порядок погрешности аппроксимации конвективного члена $/1/$:

$$\psi_i^n = O(\tau_{n+1}) + O(|u_i^n| (h_{xi}^2 + h_{xi+1}^2)) + O(\mu(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(\mu \bar{h}_{xi}^2)$$

Для $M=2$ на равномерной сетке $h_{xi} = h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i$, новая схема (7) принимает вид

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_i^n + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_x} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_x}) = \\ & = \mu[1 + \rho \frac{|u_i^n|}{2\mu} h_x + (\rho \frac{|u_i^n|}{2\mu} h_x)^{-2}] (\frac{\omega_{i+1}^n - 2\omega_i^n + \omega_{i-1}^n}{h_x^2}) + f_i^n \end{aligned}$$

Для погрешности схемы $z_i^n = \omega_i^n - \bar{\omega}_i^n$, где $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, t)$ – точное решение задачи (1), имеет место оценка

$$\|z^n\| \leq T \max_{0 \leq k \leq n} \|\psi^k\|, n = 1, 2, \dots,$$

откуда вытекает сходимость данных монотонных схем (7), а также и устойчивость схем по начальному условию d и по свободному члену f , т.е. для возмущения схемы $\hat{\omega}^n = \omega^n - \check{\omega}^n$ имеет место оценка

$$\|\hat{\omega}^n\| \leq \|\varepsilon\| + T \max_{0 \leq k \leq n} \|\xi^k\|, n = 1, 2, \dots$$

Обобщение данной технологии на уравнения в цилиндрической, сферической и других системах координат, а также на многомерные уравнения не вызывает особых затруднений.

Следует отметить, что в [3] для уравнения с младшей производной

$$(ku')' + r(x)u' - q(x)u = -f(x),$$

по технологии Самарского А.А. построена монотонная схема

$$\chi(ay_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+)} y_x + b^- ay_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \chi = 1/(1+R), R = 0,5 |r| h/k,$$

с погрешностью $O(h^2)$ на равномерной сетке.

§20. Сходимость схемы типа Кранка-Николсона. Леммы

Неявная схема типа Кранка-Николсона с аппроксимацией Джакупова К.Б. [20] конвективного члена имеет вид

$$\Phi_i^{n+1} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{x}}^{n+1} + \Phi_{\bar{x}}^n}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_x^{n+1} + \Phi_x^n}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[1 + \frac{|u^{\frac{n+1}{2}}| + u^{\frac{n+1}{2}} h_{xi}}{2a^2} + \frac{|u^{\frac{n+1}{2}}| - u^{\frac{n+1}{2}} h_{xi+1}}{2a^2} \right]^{-1} (\Phi_{xi}^{n+1} + \Phi_{xi}^n) + f^{\frac{n+1}{2}},$$

$$x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0},$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \quad (91)$$

Здесь $u^{\frac{n+1}{2}} = u(x, t_n + \tau/2)$, $f^{\frac{n+1}{2}} = f(x, t_n + \tau/2)$, погрешность аппроксимации в классе достаточно гладких функций равна

$$\psi^{\frac{n+1}{2}}(x) = O(\tau_{n+1}^2) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_1}$$

Для исследования сходимости данной схемы методом оценки нормы оператора перехода применяются леммы в норме C , доказанные Джакуповым К.Б. в /13/.

Введем пространство сеточных функций H , принимающих нулевые значения в граничных узлах $x \in S_h$: т.е. сеточная функция

$$\Psi \in H, \text{ если } \Psi(x) = 0, x \in S_h.$$

Лемма-3а. Пусть операторы

$$[E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})], m = 1, \dots, M,$$

отображают пространство H в пространство H и элементы $c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}$, $m = 1, \dots, M$ неотрицательны, кроме того выполняется условие

$$0 < \tau \leq 1 / \|c_{-m} + c_{+m}\| \quad (92)$$

Тогда C -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\|E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})\| \leq 1$$

Доказательство леммы полностью совпадает с доказательством неравенства (55), лишь надо положить $M = 1, \tau_{n+1} = \tau$,

$$c_{\mp 1}^n = c_{\mp m}, m = 1, \text{ условие (92) подобно (54).}$$

Лемма-3б. Пусть операторы

$$[E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})], k \leq M, k = 1, \dots, M$$

отображают пространство H в пространство H и элементы

$c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M$ неотрицательны, кроме того выполняется условие

$$0 < \tau \leq 1 / \left\| \sum_{m=k}^M (c_{-m} + c_{+m}) \right\|$$

Тогда S -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\left\| E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \right\| \leq 1$$

Доказательство аналогично доказательству леммы-3а, особой разницы нет, совпадает с доказательством (55).

Лемма-4а. Пусть операторы

$$[E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1}, m = 1, \dots, M$$

отображают пространство H в пространство H и элементы

$\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M$ неотрицательны.

Тогда S -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\left\| [E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \right\| \leq 1, m = 1, \dots, M$$

Доказательство аналогично доказательству (63б), необходимо положить $M = 1, \tau_n = \tau, c_{\mp 1}^n = c_{\mp m}, m = 1$.

Лемма-4б. Пусть операторы

$$[E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1}, k \leq M, k = 1, \dots, M$$

отображают пространство H в пространство H и элементы

$\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M$ неотрицательны.

Тогда S -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\left\| [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \right\| \leq 1$$

Доказательство аналогично доказательству леммы-4а и (63б).

Лемма-5а. Пусть операторы

$$[E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1},$$

$$k \leq M, k = 1, \dots, M$$

отображают пространство H в пространство H и элементы

$\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M$ неотрицательны.

Тогда S -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\| [E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \leq 1$$

Доказательство. По определению нормы линейного оператора

$$\begin{aligned} & \| [E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| = \\ & = \sup_{\substack{\Psi \in H \\ \|\Psi\|=1}} \| [E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \Psi \| \end{aligned} \quad (93)$$

Обозначим $B_M \equiv \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}), M = 1, 2, 3$

По леммам-4а и 4б имеет место неравенство

$$\| [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| = \| [E + \tau B_M]^{-1} \| \leq 1 \quad (94)$$

При выполнении условия (92) по лемме-3

$$\| E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \| \leq 1 \quad (95)$$

На основании этих двух неравенств (94) и (95) вытекает доказательство леммы-5а

$$\begin{aligned} & \| [E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \leq \\ & \leq \| [E - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] \| \| [E + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \leq 1 \end{aligned}$$

Здесь потребовалось выполнение условия (92). Лемма-5а наполовину доказана.

Пусть вместо (92) имеет место

$$\tau > 1 / \left\| \sum_{m=k}^M (c_{-m} + c_{+m}) \right\| \quad (96)$$

Докажем, что и в случае (96) лемма-5а справедлива, тем самым будет дано полное доказательство.

Введём сеточную функцию

$$\Phi = [E + \tau B_M]^{-1} \Psi, \quad \Phi \in H, \quad (97)$$

откуда вытекает

$$\Psi = [E + \tau B_M] \Phi \quad (98)$$

В силу (97) записывается

$$\begin{aligned} \|(E - \tau B_M)(E + \tau B_M)^{-1}\| &= \sup_{\|\Psi\|=1} \|(E - \tau B_M)(E + \tau B_M)^{-1}\Psi\| = \\ &= \sup_{\Phi \in H, \|(E + \tau B_M)\Phi\|=1} \|(E - \tau B_M)\Phi\| = \\ &= \sup_{\Phi \in H, \|(E + \tau B_M)\Phi\|=1} \max_{x \in \Omega_h} |(E - \tau B_M)\Phi| \end{aligned} \quad (99)$$

Так как $\|\Psi\| = 1$, то на основании (94) получается

$$\|\Phi\| = \|[E + \tau B_M]^{-1}\Psi\| \leq \|[E + \tau B_M]^{-1}\| \|\Psi\| \leq 1, \quad \|\Phi\| \leq 1 \quad (100)$$

Используется очевидное условие

$$\|\Psi\| = \|(E + \tau B_M)\Phi\| = \max_{x \in \Omega_h} |(E + \tau B_M)\Phi| = 1 \quad (101)$$

Нужно доказать справедливость неравенства

$$\max_{x \in \Omega_h} |(E - \tau B_M)\Phi| \leq 1 \quad (102)$$

для произвольного элемента $\Phi \in H$, удовлетворяющего условия (100) и (101). Пусть $\max_{x \in \Omega_h} |(E - \tau B_M)\Phi|$ достигается в

узле $x^* = (x_{l_1^*}, \dots, x_{M_1^*}) \in \Omega_h$. Обозначив

$$\Phi(x^*) \equiv \Phi^*, \quad c_{\mp m}(x^*) \equiv c_{\mp m}^*, \quad m = 1, \dots, M,$$

имеем возможность написать

$$\|(E - \tau B_M)\Phi\| = \max_{x \in \Omega_h} |(E - \tau B_M)\Phi| = |\Phi^* - \tau B_M \Phi^*| \quad (103)$$

Очевидно для выполнения неравенства (102) необходимо и достаточно выполнения следующих двух неравенств

$$-\tau B_M \Phi^* \leq 1 - \Phi^* \quad (104)$$

$$\tau B_M \Phi^* \leq 1 + \Phi^* \quad (105)$$

Из данного условия (101) вытекает неравенство

$$|\Phi^* + \tau B_M \Phi^*| \leq \max_{x \in \Omega_h} |(E + \tau B_M)\Phi| = 1$$

эквивалентное двум неравенствам

$$-\tau B_M \Phi^* \leq 1 - \Phi^* \quad (106)$$

$$\tau B_M \Phi^* \leq 1 + \Phi^* \quad (107)$$

Если имеет место следующее сочетание знаков

$$a) \Phi^* < 0, \tau B_M \Phi^* \leq 0; \quad б) \Phi^* > 0, \tau B_M \Phi^* \geq 0,$$

тогда из (106) и (107) непосредственно выполняются доказываемые (104) и (105), Рассмотрим другую пару сочетания знаков:

$$в) \Phi^* \leq 0, \tau B_M \Phi^* > 0; \quad г) \Phi^* \geq 0, \tau B_M \Phi^* < 0$$

Пусть выполняется в). В этом случае неравенство $\tau B_M \Phi^* > 0$ дает следующие неравенства

$$\sum_{m=k}^M (c_{-m}^* T_{-m} \Phi^* + c_{+m}^* T_{+m} \Phi^*) < \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*) \Phi^* \leq 0, \quad (108)$$

которые удобно преобразовать к виду

$$\frac{\sum_{m=k}^M (c_{-m}^* T_{-m} \Phi^* + c_{+m}^* T_{+m} \Phi^*)}{\sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*)} = \hat{\Phi}^* < \Phi^* \leq 0 \quad (109)$$

При выполнении условия в)

$$|\Phi^* - \tau B_M \Phi^*| = \tau B_M \Phi^* - \Phi^* = D(\Phi^*) \quad (110)$$

Из (106) и (90) вытекают

$$0 < D(\Phi^*) = \tau B_M \Phi^* - \Phi^* \leq 1 - \Phi^* - \Phi^* = 1 - 2\Phi^* \quad (111)$$

При значении $\Phi^* = 0$ на основании (111) имеем

$$0 < D(0) \leq 1 \quad (112)$$

Вычислим производную

$$\frac{dD(\Phi^*)}{d\Phi^*} = \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*) - 1$$

При неравенствах

$$\tau > 1 / \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*) \geq 1 / \left\| \sum_{m=k}^M (c_{-m} + c_{+m}) \right\| \quad (113)$$

производная будет положительной $\frac{dD(\Phi^*)}{d\Phi^*} > 0$, следовательно, $D(\Phi^*)$ есть возрастающая функция в интервале $\Phi^* \in (\hat{\Phi}^*, 0]$. Поэтому в силу (112) получается требуемое неравенство $D(\Phi^*) \leq 1$.

Пусть теперь вместо (113) выполняется противоположное

$$1 / \left\| \sum_{m=k}^M (c_{-m} + c_{+m}) \right\| \leq \tau \leq 1 / \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*),$$

В этом случае прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} D(\Phi^*) = & \left| \Phi^* - \tau B_M \Phi^* \right| \leq \left| 1 - \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* + c_{+m}^*) \right| |\Phi^*| + \\ & + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}^* |T_{-m} \Phi^*| + c_{+m}^* |T_{+m} \Phi^*|) \leq 1, \end{aligned}$$

потому как в силу (100) вытекают неравенства

$$|\Phi^*| \leq 1, |T_{-m} \Phi^*| \leq 1, |T_{+m} \Phi^*| \leq 1, m = 1, \dots, M$$

Таким образом, в обеих ситуациях выполняется доказываемое

$$|\Phi^* - \tau B_M \Phi^*| = D(\Phi^*) \leq 1$$

Аналогично исследуется сочетание γ), тем самым завершается полное доказательство леммы..

Лемма-5б. Пусть операторы

$[E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}, m = 1, \dots, M$ отображают пространство H в пространство H и элементы $\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M$ неотрицательны.

Тогда C -норма этих операторов не превосходит единицы:

$$\| [E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \leq 1$$

Доказательство следует из леммы-5а, в которой надо положить последовательно положить $k = M, M = 1, 2, 3$.

Сходимость схемы типа Кранка-Николсона. Для погрешности данной схемы получается система, подобная (91):

$$\begin{aligned}
 & Z_i^{n+1} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{Z_{\bar{x}}^{n+1} + Z_{\bar{x}}^n}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{Z_x^{n+1} + Z_x^n}{2} = \\
 & = \frac{a^2}{2(1 + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| + u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi}}{2} + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| - u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi+1}}{2})} (Z_{x\bar{x}}^{n+1} + Z_{x\bar{x}}^n) + \psi^{n+\frac{1}{2}}, x \in \Omega_h, t \in \Omega_0, \\
 & Z^0 = 0, x \in \Omega_h, Z^n|_{S_h} = 0, \quad x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau \quad (114)
 \end{aligned}$$

Вводятся положительные коэффициенты

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} &= (1 + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| + u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi}}{2} + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| - u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi+1}}{2}), \\
 c_{+1}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{a^2}{2\mathfrak{R}h_{xi}\dot{h}_{xi}} + \frac{|u_i^{n+\frac{1}{2}}| - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2\mathfrak{R}h_{xi}\dot{h}_{xi}} + \frac{|u_i^{n+\frac{1}{2}}| + u_i^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi}},
 \end{aligned}$$

затем линейный оператор $\Lambda_1 = c_{+1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{+1} - c_{-1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{-1}$. С их помощью (114) записывается в операторном виде

$$\frac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau_{n+1}} = \Lambda_1 \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} + \psi^{n+\frac{1}{2}}, \quad Z^n \in H \forall n$$

Преобразуем данную схему к виду

$$(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^{n+1} = (E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Умножая это выражение слева на обратный оператор

$$\begin{aligned}
 (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^{n+1} &= (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \\
 &+ \tau_{n+1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

получаем

$$Z^{n+1} = \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right) Z^n + \tau_{n+1} \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Далее при оценке норм используются лемма-4а и лемма -5б, условия которых здесь выполняются. Имеет место перестановочность операторов

$$\left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right) = \left(E + \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1},$$

в силу чего находим

$$\begin{aligned} \|Z^{n+1}\| &= \left\| \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right) Z^n + \tau_{n+1} \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \psi^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right) \right\| \|Z^n\| + \tau_{n+1} \left\| \left(E - \frac{\tau_{n+1}}{2} \Lambda_1\right)^{-1} \right\| \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \\ &\leq \|Z^n\| + \tau_{n+1} \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\| \end{aligned}$$

Т.о. получаются неравенства

$$\|Z^{n+1}\| \leq \|Z^n\| + \tau_{n+1} \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1,$$

из которых вытекает сходимость схемы (91):

$$\|Z^{k+1}\| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Устойчивость доказывается аналогично. Следует обратить внимание на то, что данная схема (91) абсолютно сходится и абсолютно устойчива. Следующая по типу *Кранка-Николсона* аппроксимация «без аппроксимационной вязкости»

$$\begin{aligned} \Phi_t^{n+1} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{x}^0}^{n+1} + \Phi_{\bar{x}^0}^n}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{x^0}^{n+1} + \Phi_{x^0}^n}{2} = \\ = \frac{a^2}{2} (\Phi_{x\bar{x}}^{n+1} + \Phi_{x\bar{x}}^n) + f^{n+\frac{1}{2}}, x \in \Omega_h, t \in \bar{\Omega}_{t_0}, \end{aligned}$$

$$\Phi^0 = d(x), x \in \Omega_h, \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau$$

тоже безусловно сходится и устойчива.

§21. Консервативные схемы. Метод энергетических неравенств

Разностные схемы, сохраняющие свойства дифференциального уравнения, называются *консервативными* схемами. Однородные консервативные схемы для уравнения теплопроводности исследованы Самарским А.А. в /6/, семейства консервативных схем для уравнений Навье-Стокса построены и исследованы Джакуповым К.Б. в /3/.

Идею консервативных схем поясним на уравнении Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = d(x), u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

с нулевыми краевыми условиями на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Умножив уравнение на u , проинтегрируем на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} u dx + \int_0^1 c \frac{\partial u}{\partial x} u dx = \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx$$

В полученном интегральном тождестве имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^1 c \frac{\partial u}{\partial x} u dx = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial x} dx = \frac{c}{2} [u^2(1, t) - u^2(0, t)] = 0, \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx < 0,$$

так как
$$\mu \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx = \mu \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u \right) dx - \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] < 0,$$

ибо
$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u \right) dx = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} u(1, t) - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} u(0, t) = 0.$$

Покажем, что немонотонная схема с центральной разностной производной для конвективного члена

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = \mu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2}, u_i^0 = d_i, \quad (*)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, u_0^{n+1} = 0, u_{N_x}^{n+1} = 0$$

является *консервативной* схемой, т.е. обладает сеточными

интегральными свойствами типа $\int_0^1 c \frac{\partial u}{\partial x} u dx = 0, \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx < 0$.

В предыдущих параграфах для сеточных функций типа $u^{n+1} = \{u_i^{n+1}, i = 0, 1, \dots, N_x\} \in H$ была использована максимум-норма $\|u^{n+1}\| = \max_{1 \leq i \leq N_x-1} u_i^{n+1}$, в методе энергетических неравенств.

как было сказано, используется норма типа,

$\|u^{n+1}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} h_x (u_i^{n+1})^2}$, порожденная скалярным произведением

любых двух сеточных функций, например, $u^{n+1} \in H$ и

$$z^{n+1} = \{z_i^{n+1}, i = 0, 1, \dots, N_x\} \in H : \quad (u^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} =$$

$$= \sum_{x \in \Omega_h} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x), \text{ в силу чего квадрат энергетической}$$

нормы равен $\|u^{n+1}\|^2 = (u^{n+1}, u^{n+1})$. По методу энергетических

неравенств обе части уравнения (*) умножаются на $h_x u_i^{n+1}$

и суммируются по индексу $1 \leq i \leq N_x - 1$. В результате

получается так называемое энергетическое тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} + \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = \\ = \sum_{i=1}^{N_x-1} \mu h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2}, \end{aligned}$$

в котором в силу нулевых краевых условий 2-й и 3-й члены равны нулю. В самом деле, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = c(u^{n+1}, u_x^{n+1}) = c/2 * [u_1^{n+1}(u_2^{n+1} - u_0^{n+1}) + \\ + u_2^{n+1}(u_3^{n+1} - u_1^{n+1}) + u_3^{n+1}(u_4^{n+1} - u_2^{n+1}) + \dots + u_{N_x-2}^{n+1}(u_{N_x-1}^{n+1} - u_{N_x-3}^{n+1}) + \\ + u_{N_x-1}^{n+1}(u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-2}^{n+1})] = 0, \text{ так как } u_0^{n+1} = 0, u_{N_x}^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} = \mu(u^{n+1}, u_{x\bar{x}}^{n+1}) = \\
& = \mu/h_x * [u_1^{n+1}(u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_0^{n+1}) + u_2^{n+1}(u_3^{n+1} - 2u_2^{n+1} + u_1^{n+1}) + \\
& + u_3^{n+1}(u_4^{n+1} - 2u_3^{n+1} + u_2^{n+1}) + \dots + u_{N_x-2}^{n+1}(u_{N_x-1}^{n+1} - 2u_{N_x-2}^{n+1} + u_{N_x-3}^{n+1}) + \\
& + u_{N_x-1}^{n+1}(u_{N_x}^{n+1} - 2u_{N_x-1}^{n+1} + u_{N_x-2}^{n+1})] = \\
& = \mu/h_x * [-u_1^{n+1}u_1^{n+1} - (u_2^{n+1} - u_1^{n+1})^2 - (u_3^{n+1} - u_2^{n+1})^2 - \\
& - (u_4^{n+1} - u_3^{n+1})^2 - \dots - (u_{N_x-1}^{n+1} - u_{N_x-2}^{n+1})^2 - u_{N_x-1}^{n+1}u_{N_x-1}^{n+1}] < 0
\end{aligned}$$

Поскольку имеют место приближения

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 c \frac{\partial u}{\partial x} u dx \approx \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = 0, \\
& \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx \approx \mu \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} < 0,
\end{aligned}$$

то консервативность немонотонной схемы (*) доказана.

Для получения априорных оценок используются неравенство Коши, ε – неравенство и леммы.

Неравенство Коши $\sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N b_i^2}$. Имеет место

неравенство $\sum_{i=1}^N (a_i z + b_i)^2 \geq 0$. Для того чтобы выполнялось это

очевидное соотношение дискриминант квадратного уравнения

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)z^2 + 2\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i\right)z + \sum_{i=1}^N b_i^2 = 0$$

должен быть неположительным: $\Delta = [2\sum_{i=1}^N a_i b_i]^2 - 4\sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 \leq 0$.

Сокращая на 4 и извлекая корень получаем неравенство Коши.

ε – **неравенство** $|cd| \leq \varepsilon c^2 + \frac{1}{4\varepsilon} d^2, \varepsilon > 0$. Вытекает из нерав-

енства $\pm 2ab \leq a^2 + b^2$, если в нем переобозначить

$$a = c\sqrt{\varepsilon}, d = b/(2\sqrt{\varepsilon}).$$

Вводятся скалярные произведения сеточных функций в областях, определенных в §1 модуля-2. На сетке Ω_h скалярное произведение введено выше. Аналогично вводятся скалярные произведения: на сетке $\Omega'_{hm} = \Omega_h US_{mh}$, $m = 1$,

$$[u^{n+1}, z^{n+1}] = \sum_{i=0}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{x \in \Omega_{h1}} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x)$$

и на сетке $\Omega''_{hm} = \Omega_h \overline{US}_{mh}$, $m = 1$,

$$[u^{n+1}, z^{n+1}] = \sum_{i=1}^{N_x} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{x \in \Omega_{h1}} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x).$$

Им соответствуют нормы

$$\begin{aligned} |[z^{n+1}]|^2 &= [z^{n+1}, z^{n+1}] = \sum_{i=0}^{N_x-1} h_x z_i^{n+1} z_i^{n+1}, \\ \|[z^{n+1}]\|^2 &= (z^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x} h_x z_i^{n+1} z_i^{n+1} \end{aligned}$$

Лемма-А. Для $z^{n+1} \in H$, т.е. $z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0$, имеет место равенство $(Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) = (Ch_x/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2)$, $C = const$.

Доказательство. В скалярном произведении с учетом $z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0$ совершается дополнение до полного квадрата

$$(Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x C z_i^{n+1} \frac{z_i^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{h_x} = \sum_{i=1}^{N_x} h_x \frac{Ch_x}{2} \left(\frac{z_i^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{h_x} \right)^2 = \left(\frac{Ch_x}{2}, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2 \right)$$

Лемма-В. Для $z^{n+1} \in H$, т.е. $z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0$, имеет место равенство $(Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) = [-Ch_x/2, (z_x^{n+1})^2]$, $C = const$.

Доказательство. В скалярном произведении с учетом $z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0$ совершается дополнение до полного квадрата

$$(Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x C z_i^{n+1} \frac{z_{i+1}^{n+1} - z_i^{n+1}}{h_x} = - \sum_{i=1}^{N_x} h_x \frac{Ch_x}{2} \left(\frac{z_{i+1}^{n+1} - z_i^{n+1}}{h_x} \right)^2 = \left[-\frac{Ch_x}{2}, (z_x^{n+1})^2 \right]$$

Лемма-С. Для $z^{n+1} \in H$, т.е. $z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0$, имеет место равенство

$$(\mu z^{n+1}, z_{x\bar{x}}^{n+1}) = [-\mu/2, (z_x^{n+1})^2] + (-\mu/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2], \mu = const$$

Доказательство. Благодаря леммам-А и -В, где надо положить $C = \mu/h_x$ и имея в виду равенство $z_{x\bar{x}}^{n+1} = (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x$ находим

$$\begin{aligned} (\mu z^{n+1}, z_{x\bar{x}}^{n+1}) &= (\mu z^{n+1}, (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x) = (Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) - (Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) = \\ &= [-Ch_x/2, (z_x^{n+1})^2] + (-Ch_x/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2] = \\ &= [-\mu/2, (z_x^{n+1})^2] + (-\mu/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2], \end{aligned}$$

ч.т.д.

Для погрешности консервативной схемы имеет место разностная задача

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau_{n+1}} + c \frac{z_{i+1}^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = \mu \frac{z_{i+1}^{n+1} - 2z_i^{n+1} + z_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \psi_i^{n+1}, z_i^0 = 0, \quad (**)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0,$$

что может быть записано в разностных производных в форме $z_i^{n+1} + cz_{\bar{x}}^{n+1} = \mu z_{x\bar{x}}^{n+1} + \psi^{n+1}, z^0 = 0, x \in \Omega_h, z_0^{n+1} = 0, z_{N_x}^{n+1} = 0, (***)$

где погрешность аппроксимации равна $\psi^{n+1}(x) = O(\tau_{n+1}) + O(h_x^2)$.

Умножая обе части уравнения (***) скалярно на $\tau_{n+1}z^{n+1}$, в результате получаем энергетическое тождество

$$(z^{n+1} - z^n, z^n) + \tau_{n+1}(cz_{x\bar{x}}^{n+1}, z^{n+1}) = \tau_{n+1}(\mu z_{x\bar{x}}^{n+1}, z^{n+1}) + \tau_{n+1}(\psi^{n+1}, z^{n+1}),$$

где

$$(cz_{x\bar{x}}^{n+1}, z^{n+1}) = (c/2 * (z_x^{n+1} + z_{\bar{x}}^{n+1}), z^{n+1}),$$

$$(\mu z_{x\bar{x}}^{n+1}, z^{n+1}) = (\mu (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x, z^{n+1}),$$

в силу чего энергетическое тождество принимает вид

$$(z^{n+1} - z^n, z^{n+1}) + \tau_{n+1}(c/2 * (z_x^{n+1} + z_{\bar{x}}^{n+1}), z^{n+1}) =$$

$$= \tau_{n+1}(\mu (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x, z^{n+1}) + \tau_{n+1}(\psi^{n+1}, z^{n+1}),$$

или после приведения подобных

$$(z^{n+1} - z^n, z^{n+1}) - \tau_{n+1} \left(\left(\frac{\mu}{h_x} - \frac{c}{2} \right) z_x^{n+1}, z^{n+1} \right) + \tau_{n+1} \left(\left(\frac{\mu}{h_x} + \frac{c}{2} \right) z_{\bar{x}}^{n+1}, z^{n+1} \right) = \\ = \tau_{n+1} (\psi^{n+1}, z^{n+1})$$

На основании лемм -А и -В преобразуем это тождество:

$$(z^{n+1}, z^{n+1}) + \tau_{n+1} \left[\left(\frac{\mu}{h_x} - \frac{c}{2} \right) \frac{h_x}{2}, (z_x^{n+1})^2 \right] + \tau_{n+1} \left[\left(\frac{\mu}{h_x} + \frac{c}{2} \right) \frac{h_x}{2}, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2 \right] = \\ = (z^n, z^{n+1}) + \tau_{n+1} (\psi^{n+1}, z^{n+1})$$

По неравенству Коши

$$(z^n, z^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x z_i^n z_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} z_i^n) (\sqrt{h_x} z_i^{n+1}) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} z_i^n)^2 \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} z_i^{n+1})^2 = \|z^n\| \|z^{n+1}\|,$$

выводится аналогичное неравенство

$$(\psi^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x \psi_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} \psi_i^{n+1}) (\sqrt{h_x} z_i^{n+1}) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} \psi_i^{n+1})^2 \sum_{i=1}^{N_x-1} (\sqrt{h_x} z_i^{n+1})^2 = \|\psi^{n+1}\| \|z^{n+1}\|$$

В результате тождество переходит в энергетическое неравенство

$$\|z^{n+1}\|^2 + \tau_{n+1} \left[\left(\frac{\mu}{h_x} - \frac{c}{2} \right) \frac{h_x}{2}, (z_x^{n+1})^2 \right] + \tau_{n+1} \left[\left(\frac{\mu}{h_x} + \frac{c}{2} \right) \frac{h_x}{2}, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2 \right] = \\ = (z^n, z^{n+1}) + \tau_{n+1} (\psi^{n+1}, z^{n+1}) \leq \|z^n\| \|z^{n+1}\| + \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\| \|z^{n+1}\|$$

Потребуем выполнения известных неравенств $\left(\frac{\mu}{h_x} \mp \frac{c}{2} \right) \geq 0$,

использованных ранее в максимум-норме С. Тогда в левой части второй и третий члены становятся неотрицательными числами и, отбрасывая их, только усилим данное неравенство

$$\|z^{n+1}\|^2 \leq \|z^n\| \|z^{n+1}\| + \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\| \|z^{n+1}\|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Сокращая на $\|z^{n+1}\|$, получаем

$$\|z^{n+1}\| \leq \|z^n\| + \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1,$$

Эти неравенства суммируются, как обычно,

$$\sum_{n=0}^k \|z^{n+1}\| \leq \sum_{n=0}^k \|z^n\| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

После сокращений получается

$$\|z^{k+1}\| \leq \|z^0\| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Начальное условие дает $\|z^0\| = 0$, в силу чего

$$\|z^{k+1}\| \leq \|z^0\| + \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\| = \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \|\psi^{n+1}\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Далее производится оценка

$$\|z^{k+1}\| \leq \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \|\psi^n\| \leq \sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \max_{0 \leq n \leq k} \|\psi^n\| \leq \max_{0 \leq n \leq k} \|\psi^n\| \sum_{n=0}^k \tau_{n+1}$$

На основании очевидного неравенства $\sum_{n=0}^k \tau_{n+1} \leq \bar{\tau}$ находим

$$\|z^{k+1}\| \leq \bar{\tau} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^{n+1}\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1,$$

где пределом погрешности аппроксимации является нуль

$$\|\psi^n\| = O(\tau_{n+1}) + O(h_x^2) \rightarrow 0$$

при сгущении узлов сеточных областей $\tau_{n+1} \rightarrow 0, h_x \rightarrow 0$.

Сходимость консервативной схемы здесь доказана методом энергетических неравенств. Ранее устойчивость и сходимость таких схем была исследована в сеточной максимум-норме S . Консервативные схемы немонотонны, сходятся и устойчивы при выполнении ограничения на шаги пространственной сетки

$$\left(\frac{\mu}{h_x} \mp \frac{c}{2}\right) \geq 0, \text{ эти же условия являются условиями устойчивости}$$

метода трехточечной прогонки, поэтому консервативные схемы неэффективны.

Вопросы:

1. Каким свойством обладают консервативные схемы?
2. В схеме Рундсона доказать, что корни дисперсионного квадратичного

уравнения по модулю строго больше 1: $|p| > 1$, тем самым будет показана абсолютная неустойчивость схемы Ричардсона.

3. Для аппроксимаций 2-го порядка точности граничных условий фон Неймана

$$\left(\lambda \frac{-3\Phi_0^n + 4\Phi_1^n - \Phi_2^n}{2h_x} + \gamma\Phi_0^n \right) \Big|_{S_h} = \varphi_0^n$$

$$\left(\lambda \frac{3\Phi_{N_x}^n - 4\Phi_{N_x-1}^n + \Phi_{N_x-2}^n}{2h_x} + \gamma\Phi_{N_x}^n \right) \Big|_{S_h} = \varphi_{N_x}^n$$

написать формулы трехточечных прогонок; то же самое выполнить для формул пятиточечной прогонки.

4. Доказать в схема Дюфорга-Френкеля выполнение неравенства $|p| \leq 1$.

Модуль-6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§1. Постановка задачи

Рассматривается задача *Коши-Дурихле* для двумерного параболического уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u(x, y, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v(x, y, t) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1)$$

$$a^2 = \text{const}, \Phi \Big|_{t=t_0} = d(x, y), \Phi \Big|_S = \varphi(x, y, t)$$

§2. Явные монотонные схемы

Явная монотонная схема 1-го порядка аппроксимации неактивных членов. По теории модуля-3 явная монотонная схема

$$\begin{aligned} \Phi_t^n + \left[\frac{u^n + |u^n|}{2} \Phi_x^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_x^n \right] + \left[\frac{|v^n| + v^n}{2} \Phi_y^n + \frac{v^n - |v^n|}{2} \Phi_y^n \right] = \\ = a^2 (\Phi_{x\bar{x}}^n + \Phi_{y\bar{y}}^n) + f^n, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\Phi^0 = d(x, y), (x, y) \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x, y), (x, y) \in S_h, t \in \bar{\Omega}_\tau,$$

использующая аппроксимацию *Булеева-Петрищева*, имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-й порядок точности.

Через разностные операторы (2) записывается в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \left[\frac{|u_{ij}^n| + |u_{ij}^n|}{2} \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| - |u_{ij}^n|}{2} \frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} \right] + \\
& \quad + \left[\frac{|v_{ij}^n| + |v_{ij}^n|}{2} \frac{\Delta_{-2}\Phi^n}{h_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| - |v_{ij}^n|}{2} \frac{\Delta_{+2}\Phi^n}{h_{yj+1}} \right] = \\
& = a^2 \left[\left(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\tilde{h}_{xi}} + \left(\frac{\Delta_{+2}\Phi^n}{h_{yj+1}} - \frac{\Delta_{-2}\Phi^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{\tilde{h}_{yj}} \right] + f_{ij}^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0},
\end{aligned}$$

$$\Phi^0 = d(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega_h, \Phi^n|_{S_h} = \varphi^n(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Вводятся обозначения коэффициентов при операторах

$$\begin{aligned}
c_{+1}^n &= \frac{a^2}{h_{xi+1} \tilde{h}_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| - |u_{ij}^n|}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi} \tilde{h}_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| + |u_{ij}^n|}{2h_{xi}}, \\
c_{+2}^n &= \frac{a^2}{h_{yj+1} \tilde{h}_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| - |v_{ij}^n|}{2h_{yj+1}}, c_{-2}^n = \frac{a^2}{h_{yj} \tilde{h}_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| + |v_{ij}^n|}{2h_{yj}}, \quad (3) \\
\Lambda_1^n &= c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}, \quad \Lambda_2^n = c_{+2}^n \Delta_{+2} - c_{-2}^n \Delta_{-2}
\end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\begin{aligned}
\psi^n(x_i, y_j) &= O(\tau_{n+1}) + O(\tilde{h}_{xi}) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \tilde{h}_{xi}^2) + \\
& + O(\tilde{h}_{yj}) + O(a^2(h_{yj+1} - h_{yj})) + O(a^2 \tilde{h}_{yj}^2), (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}
\end{aligned}$$

Явная монотонная схема 2-го порядка аппроксимации конвективных членов. Конструкция такой схемы, данная Джакуповым К.Б. в [20], имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + |u_{ij}^n|}{2} \Phi_{\bar{x}}^n + \frac{|u_{ij}^n| - |u_{ij}^n|}{2} \Phi_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + |v_{ij}^n|}{2} \Phi_{\bar{y}}^n + \frac{|v_{ij}^n| - |v_{ij}^n|}{2} \Phi_y^n = \\
& = \frac{a_x^{v(n)}}{\tilde{h}_{xi}} (\Phi_x^n - \Phi_{\bar{x}}^n) + \frac{a_y^{u(n)}}{\tilde{h}_{yj}} (\Phi_y^n - \Phi_{\bar{y}}^n) + f_{ij}^n, \quad i=1, \dots, N_x-1, j=1, \dots, N_y-1, \quad (4)
\end{aligned}$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q = \left[1 + \frac{|u_{ij}^n| + |u_{ij}^n|}{4a^2} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - |u_{ij}^n|}{4a^2} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + |v_{ij}^n|}{4a^2} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - |v_{ij}^n|}{4a^2} h_{yj+1} \right],$$

$$a_x^{v(n)} = [a^2 + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1}] / Q,$$

$$a_y^{u(n)} = [a^2 + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1}] / Q$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi^n(x_i, y_j) = O(\tau_{n+1}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2\hbar_{xi}^2) + O(\hbar_{yj}^2) + O(a^2(h_{yj+1} - h_{yj})) + O(a^2\hbar_{yj}^2), (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

Здесь коэффициенты при операторах равны

$$c_{+1}^n = \frac{a_x^{v(n)}}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{2h_{xi+1}} > 0, c_{-1}^n = \frac{a_x^{v(n)}}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2h_{xi}} > 0,$$

$$c_{+2}^n = \frac{a_y^{u(n)}}{h_{yj+1}\hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{2h_{yj+1}} > 0, c_{-2}^n = \frac{a_y^{u(n)}}{h_{yj}\hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2h_{yj}} > 0,$$

$$\Lambda_1^n = c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}, \quad \Lambda_2^n = c_{+2}^n \Delta_{+2} - c_{-2}^n \Delta_{-2}$$

С их помощью монотонные схемы (2) и (4) записываются в едином операторном виде

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\tau_{n+1}} = (\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)\Phi^n + f^n \quad (5)$$

Сходимость. Для погрешности обеих схем получается задача

$$\frac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau_{n+1}} = (\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)Z^n + \psi^n, Z^0 = 0, \quad Z^n|_{S_n} = 0$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &= Z^n + \tau_{n+1}(\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)Z^n + \tau_{n+1}\psi^n, \\ Z^{n+1} &= [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)]Z^n + \tau_{n+1}\psi^n \end{aligned} \quad (6)$$

По лемме-4б должно быть выполнено условие

$$0 < \tau_{n+1} \leq 1 / \left\| \sum_{m=1}^2 (c_{-m}^n + c_{+m}^n) \right\|, n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad (7)$$

тогда $\| [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)] \| \leq 1$, вследствие чего получаются неравенства

$$\begin{aligned} & \|Z^{n+1}\| = \| [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)]Z^n + \tau_{n+1}\Psi^n \| \leq \\ & \leq \| [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^n + \Lambda_2^n)] \| \|Z^n\| + \tau_{n+1} \|\Psi^n\| \leq \|Z^n\| + \tau_{n+1} \|\Psi^n\|, \\ & \|Z^{k+1}\| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\Psi^n\|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1 \end{aligned}$$

откуда вытекает сходимость монотонных явных схем (2) и (4).

§3. Явная неоднородная схема без «аппроксимационной вязкости»

В этой схеме для конвективных членов используется аппроксимация Джакупова К.Б., имеющая 2-й порядок точности как на равномерной так и на неравномерной сетках и имеет вид в принятых обозначениях:

$$\begin{aligned} \Phi_t^n + \left[\frac{u^n + |u^n|}{2} \Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n \right] + \left[\frac{v^n + |v^n|}{2} \Phi_{\bar{y}^0}^n + \frac{v^n - |v^n|}{2} \Phi_{y^0}^n \right] = \\ = a^2 (\Phi_{xx}^n + \Phi_{yy}^n) + f^n, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}, \end{aligned}$$

Условие устойчивости этой схемы принимает наиболее простой вид на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y$:

$$[1 - \tau_{n+1} \left(\frac{2a^2}{h_x^2} + \frac{3|u_{ij}^n|}{2h_x} + \frac{2a^2}{h_y^2} + \frac{3|v_{ij}^n|}{2h_y} \right)] \geq 0, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1,$$

§4. Схема типа Кранка-Николсона

Схема типа Кранка-Николсона, использующая аппроксимацию Джакупова К.Б. /20/, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_t^n + \left[\frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{x}}^{n+1} + \Phi_{\bar{x}}^n}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_x^{n+1} + \Phi_x^n}{2} \right] + \\ + \left[\frac{v^{n+\frac{1}{2}} + |v^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{y}}^{n+1} + \Phi_{\bar{y}}^n}{2} + \frac{v^{n+\frac{1}{2}} - |v^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_y^{n+1} + \Phi_y^n}{2} \right] = \\ = a_x^{v(n+\frac{1}{2})} \frac{\Phi_{\bar{x}\bar{x}}^{n+1} + \Phi_{\bar{x}\bar{x}}^n}{2} + a_y^{u(n+\frac{1}{2})} \frac{\Phi_{\bar{y}\bar{y}}^{n+1} + \Phi_{\bar{y}\bar{y}}^n}{2} + f^{n+\frac{1}{2}}, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации имеет 2-й порядок и равна

$$\begin{aligned} \psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i, y_j) = & O(\tau_{n+1}^2) + O(\hbar_{xi}^2) + O(\hbar_{yj}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + \\ & + O(a^2\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{yj+1} - h_{yj})) + O(a^2\hbar_{yj}^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \end{aligned}$$

С помощью обозначений

$$c_{+1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_x^{v(n+\frac{1}{2})}}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_x^{v(n+\frac{1}{2})}}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| + u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_y^{u(n+\frac{1}{2})}}{h_{yj+1}\hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| - v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{yj+1}}, c_{-2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_y^{u(n+\frac{1}{2})}}{h_{yj}\hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| + v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{yj}},$$

$$\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} = c_{+1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{+1} - c_{-1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{-1}, \quad \Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} = c_{+2}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{+2} - c_{-2}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{-2}$$

схема записывается кратко

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\tau_{n+1}} = (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\Phi^{n+1} + \Phi^n}{2} + f^{n+\frac{1}{2}}$$

Сходимость. Для погрешности схемы получается задача

$$\frac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau_{n+1}} = (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}}) \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} + \psi^{n+\frac{1}{2}}, Z^0 = 0, \quad Z^n|_{S_h} = 0$$

Преобразуем это выражение к виду

$$[E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^{n+1} = [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n + \tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}},$$

$$Z^{n+1} = [E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} \{ [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n + \tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}} \},$$

$$\|Z^{n+1}\| = \| [E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} \{ [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n + \tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}} \} \| \leq$$

$$\leq \| [E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})] Z^n \| +$$

$$+ \tau_{n+1} \| [E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} \psi^{n+\frac{1}{2}} \| \leq$$

$$\leq \| [E - \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} [E + \tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})] \| \| Z^n \| +$$

$$+ \tau_{n+1} \| [E - \tau_{n+1} (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} \| \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \| \quad (8)$$

По леммам-4б и -5а имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \| [E - \tau_{n+1} (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} \| \leq 1, \\ & \| [E - \tau_{n+1} (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1} [E + \tau_{n+1} (\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})] \| \leq 1, \end{aligned}$$

в силу чего из вытекает

$$\| Z^{n+1} \| \leq \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

$$\| Z^{k+1} \| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

сходимость схемы типа *Кранка-Николсона*, ч.т.д. Устойчивость доказывается аналогично.

Монотонная неявная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \Phi_i^n + \left[\frac{u^n + |u^n|}{2} \Phi_{\bar{x}}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_x^n \right] + \left[\frac{v^n + |v^n|}{2} \Phi_y^n + \frac{v^n - |v^n|}{2} \Phi_y^n \right] = \\ & = \frac{a_x^{v(n)}}{\hbar_{xi}} (\Phi_x^n - \Phi_{\bar{x}}^n) + \frac{a_y^{u(n)}}{\hbar_{yj}} (\Phi_y^n - \Phi_y^n) + f^n, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1}, \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации 1-го порядка по времени и равна

$$\begin{aligned} & \psi^n(x_i, y_j) = O(\tau_{n+1}) + O(\hbar_{xi}^2) + \\ & + O(\hbar_{yj}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2 \hbar_{xi}^2) + \\ & + O(a^2(h_{yj+1} - h_{yj})) + O(a^2 \hbar_{yj}^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \end{aligned}$$

Абсолютно устойчива, сходимость доказывается с помощью леммы -4б.

В схеме типа *Кранка-Николсона* и неявной схеме Φ^{n+1} вычисляется либо матричной прогонкой либо итерациями (можно методом простой итерации *Якоби*).

§5. Схема *Письмана-Ракфорда*

Письман, Ракфорд, а также одновременно *Дуглас* в 1955г. уравнение теплопроводности /12/

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), a^2 = \text{const}, T|_{t=t_0} = d(x, y), T|_S = \varphi(x, y, t)$$

предложили аппроксимировать разностной схемой альтернативных направлений

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{0.5\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n, \quad (9)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^{n+1}, T^0 = d, \quad (10)$$

на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y,$

$$A_1 = \frac{a^2}{h_x^2} (\Delta_{+1} - \Delta_{-1}), A_2 = \frac{a^2}{h_y^2} (\Delta_{+2} - \Delta_{-2}),$$

Краевые условия *Письманом-Ракфордом, Дугласом* были взяты в виде

$$T^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{2}}, T^{n+1}|_{S_h} = \varphi^{n+1} \quad (11)$$

При краевых условиях (11) *погрешность аппроксимации равна*

$$\psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i, y_j) = O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0} \quad (12)$$

Трехточечными прогонками по направлению x вычисляется поле $T^{n+\frac{1}{2}}$ с использованием краевого условия $T^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}},$ трехточечными прогонками по направлению y вычисляется поле T^{n+1} с использованием краевого условия $T^{n+1}|_{S_h} = \varphi^{n+1}.$ Схема *Письмана-Ракфорда* абсолютно устойчива /12/.

§6. Схема альтернативных направлений с граничными условиями *Кряквиной-Дьяконова*

Точность схемы *Письмана-Ракфорда и Дугласа* по времени 1-го порядка (12). *Кряквина Т.М., Дьяконов Е.Г.* для повышения точности использовали следующий прием.

Из (9) и (10) исключается $A_1 T^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{2T^{n+\frac{1}{2}} - T^n - T^{n+1}}{0.5\tau} = A_2 T^n - A_2 T^{n+1}, x \in \Omega_h,$$

откуда вытекает

$$T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{T^n + T^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}(A_2 T^n - A_2 T^{n+1}), x \in \Omega_h \quad (13)$$

Это выражение, очевидно, имеет место во всех внутренних узлах $x \in \Omega_h$ без исключения. Именно поэтому логично требовать выполнение данного равенства и в граничных узлах S_h :

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h} = \frac{T^n + T^{n+1}}{2} \Big|_{S_h} + \frac{\tau}{4}(A_2 T^n - A_2 T^{n+1}) \Big|_{S_h}, x \in S_h \quad (14)$$

На границе $T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$, в силу чего из (14) получается нужное:

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h(x=0)} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}(A_2 \varphi^n - A_2 \varphi^{n+1}) \quad (15)$$

Схема

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{0.5\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n, \quad (16)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^{n+1}, T^0 = d, \quad (17)$$

имеет следующие граничные условия

$$T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}, \quad (18)$$

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h(x=a_1)} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}(A_2 \varphi^n - A_2 \varphi^{n+1}), \quad (19)$$

Граничное условие (19) позволяет исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$ из (16)-(17), поэтому название - *схема переменных направлений* /6/.

в то время как условие *Письмана-Ракфорда* $T^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{2}}$ не дает такой возможности, т.е. из (9)-(10) нельзя исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$.

Исключение $T^{n+\frac{1}{2}}$ производится следующими действиями. Система (16)-(17) приводится к следующему виду

$$(E - 0.5\tau A_1)T^{n+\frac{1}{2}} = (E + 0.5\tau A_2)T^n, \quad (20)$$

$$(E - 0.5\tau A_2)T^{n+1} = (E + 0.5\tau A_1)T^{n+\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Уравнение (20) умножается слева на $(E + 0.5\tau A_1)$, (21) – на $(E - 0.5\tau A_1)$ и складывается с целью исключения $T^{n+\frac{1}{2}}$.

Получается схема в целых шагах

$$(E - 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_2)T^{n+1} = (E + 0.5\tau A_1)(E + 0.5\tau A_2)T^n \quad (22)$$

Выражение (22) преобразуется к виду

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = (A_1 + A_2) \frac{T^{n+1} + T^n}{2} - \frac{1}{4} \tau^2 A_1 A_2 \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} \right) \quad (23)$$

Из разложений в ряды *Тейлора*

$$T^n = T^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3),$$

$$T^{n+1} = T^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3),$$

следуют

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad \frac{T^{n+1} + T^n}{2} = T^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \quad (24)$$

В силу (24) *погрешность аппроксимации* схемы (16)-(19) равна

$$\psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i, y_j) = O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2), \quad x \in \Omega_h, \quad t \in \Omega_{t0},$$

следовательно, имеет более высокий порядок точности.

Устойчивость. Записав аналогичное (22) уравнение для возмущения схемы, умножим его на обратный оператор

$(E - 0.5\tau A_2)^{-1}(E - 0.5\tau A_1)^{-1}$. Найдем:

$$\hat{Z}^{n+1} = (E - 0.5\tau A_2)^{-1}(E - 0.5\tau A_1)^{-1}(E + 0.5\tau A_1)(E + 0.5\tau A_2)\hat{Z}^n \quad (25)$$

Операторы составлены из постоянных коэффициентов, поэтому возможна их перестановка в (25)

$$\hat{Z}^{n+1} = (E + 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_1)^{-1}(E + 0.5\tau A_2)(E - 0.5\tau A_2)^{-1}\hat{Z}^n \quad (26)$$

По лемме-5б нормы операторов не превосходят 1:

$$\begin{aligned} & \| (E + 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_1)^{-1}(E + 0.5\tau A_2)(E - 0.5\tau A_2)^{-1} \| \leq \\ & \leq \| (E + 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_1)^{-1} \| \cdot \| (E + 0.5\tau A_2)(E - 0.5\tau A_2)^{-1} \| \leq 1 \end{aligned}$$

Взяв по норме от обеих частей (26), воспользуемся данной оценкой

$$\begin{aligned} \| \hat{Z}^{n+1} \| & \leq \| (E + 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_1)^{-1}(E + 0.5\tau A_2)(E - 0.5\tau A_2)^{-1} \hat{Z}^n \| \leq \\ & \leq \| (E + 0.5\tau A_1)(E - 0.5\tau A_1)^{-1}(E + 0.5\tau A_2)(E - 0.5\tau A_2)^{-1} \| \| \hat{Z}^n \| \leq \| \hat{Z}^n \|, \\ & n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \leq \| \hat{Z}^n \|, \| \hat{Z}^{n+1} \| \leq \| \hat{Z}^0 \|, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Таким образом, доказана абсолютная устойчивость схемы переменных направлений, потому как имеют место неравенства

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \leq \varepsilon, n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

§7. Схема альтернативных направлений типа

Самарского А.А.

Применяя обозначения §4 напомним схему переменных направлений двумерного уравнения диффузии, следуя конструкции *Самарского А.А.*:

$$\frac{C^{n+\frac{1}{2}} - C^n}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} C^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^n C^n + f^{n+\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$\frac{C^{n+1} - C^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} C^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+1} C^{n+1} + f^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда получается после исключения $\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} C^{n+\frac{1}{2}}$

$$C^{n+\frac{1}{2}} = \frac{C^n + C^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}(\Lambda_2^n C^n - \Lambda_2^{n+1} C^{n+1}), x \in \Omega_h,$$

что позволяет поставить граничные условия по Дьяконову Е.Г.

$$C^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}(\Lambda_2^n \varphi^n - \Lambda_2^{n+1} \varphi^{n+1}) \quad (29)$$

Перепишем (27)-(28) в виде

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})C^{n+\frac{1}{2}} = (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)C^n + 0.5\tau f^{n+\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

$$(E - 0.5\tau\Lambda_2^n)C^{n+1} = (E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}A_1)C^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\tau f^{n+\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Умножив (30) на $(E + 0.5\tau\Lambda_1^n)$, (31) на $(E - 0.5\tau\Lambda_1^n)$ и сложим их с целью исключения $C^{n+\frac{1}{2}}$. Получается

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})C^{n+1} = (E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E + 0.5\tau\Lambda_2^n)C^n + \tau f^{n+\frac{1}{2}}$$

Подействуем слева обратным оператором $(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}$:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})C^{n+1} = (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E + 0.5\tau\Lambda_2^n)C^n + \\ + \tau(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1} f^{n+\frac{1}{2}}$$

По лемме-4а $\| (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1} \| \leq 1$, а по лемме-5б

$$\| (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}) \| = \\ = \| (E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1} \| \leq 1$$

Для погрешности схемы вытекает

$$(E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1} = (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n + \\ + \tau(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1} \psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Берем по норме и используем оценки норм операторов

$$\begin{aligned}
& \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1} \| = \| (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n + \\
& + \tau(E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}} \| \leq \| (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}) \| * \\
& * \| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| + \tau \| (E - 0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1} \| \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \| \leq \\
& \leq \| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| + \tau \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|,
\end{aligned}$$

что дает неравенства

$$\begin{aligned}
& \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1} \| \leq \| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| + \tau \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, \quad (32) \\
& n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1
\end{aligned}$$

По лемме-5б

$$\begin{aligned}
& \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^n)^{-1}(E + 0.5\tau\Lambda_2^n) \| = \\
& = \| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)(E - 0.5\tau\Lambda_2^n)^{-1} \| \leq 1
\end{aligned}$$

По определению нормы линейного оператора и лемме-5б

$$\begin{aligned}
& \| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)(E - 0.5\tau\Lambda_2^n)^{-1} \| = \quad (33) \\
& = \sup_{\Psi \in H} \frac{\| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)(E - 0.5\tau\Lambda_2^n)^{-1}\Psi \|}{\| \Psi \|} = \sup_{Z \in H} \frac{\| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z \|}{\| (E - 0.5\tau\Lambda_2^n)Z \|} \leq 1
\end{aligned}$$

Из (33) вытекает

$$\| (E + 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| \leq \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| \quad (34)$$

На основании (34) переходим от (32) к следующему неравенству

$$\begin{aligned}
& \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1} \| \leq \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| + \tau \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, \\
& n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1
\end{aligned}$$

Суммируем

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^k \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1} \| \leq \sum_{n=0}^k \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^n)Z^n \| + \sum_{n=0}^k \tau \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, \\
& k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1
\end{aligned}$$

После сокращений находим

$$\| (E - 0.5\tau\Lambda_2^{k+1})Z^{k+1} \| \leq \| (E - 0.5\tau\Lambda_2^0)Z^0 \| + \sum_{n=0}^k \tau \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, \quad (35)$$

$$k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

Начальная погрешность схемы равна нулю: $Z^0 = 0$ и имеют место неравенства

$$\sum_{n=0}^k \tau \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|, \|(E - 0.5\tau\Lambda_2^{k+1})Z^{k+1}\| \leq \|Z^{k+1}\|$$

Поэтому из (35) следует сходимость схемы переменных направлений

$$\|Z^{k+1}\| \leq \bar{t} \max_{0 \leq n \leq N_\tau - 1} \|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|, \quad k = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$$

§8. Схема Дугласа-Ракфорда

Дуглас и Ракфорд /12/ в 1955г. уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), a^2 = \text{const}, T|_{t=t_0} = d(x, y), T|_S = \varphi(x, y, t)$$

аппроксимировали схемой со стабилизирующей поправкой

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n, \quad (36)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = A_2 (T^{n+1} - T^n), T^0 = d, \quad (37)$$

на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y,$

$$A_1 = \frac{a^2}{h_x^2} (T_{+1} - 2E + T_{-1}) = \frac{a^2}{h_x^2} (\Delta_{+1} - \Delta_{-1}),$$

$$A_2 = \frac{a^2}{h_y^2} (T_{+2} - 2E + T_{-2}) = \frac{a^2}{h_y^2} (\Delta_{+2} - \Delta_{-2})$$

Граничные условия Дуглас и Ракфорд поставили в виде

$$T^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{2}}, \quad T^{n+1}|_{S_h} = \varphi^{n+1} \quad (38)$$

По теории Е.Г.Дьяконова из (37) вытекает правильное граничное условие

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=x_0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = \varphi^n + (E - \tau A_2)(\varphi^{n+1} - \varphi^n) \quad (39)$$

Только на основании (39) можно исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$ из (36)-(37), в результате чего схема *Дугласа-Ракфорда* становится эквивалентной схеме в целых шагах

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = A_1 T^n + A_2 T^n, \quad (40)$$

В данном случае *погрешность аппроксимации* равна

$$\psi^n(x_i, y_j) = O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0} \quad (41)$$

Обратно, для получения (36)-(37) из (40) обозначают

$$(E - \tau A_2) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} \quad (42)$$

Очевидно (40) и (42) дают схему *Дугласа-Ракфорда* (36)-(37). Алгоритм решения прост. Трехточечными прогонками по

направлению x *вычисляются* $T^{n+\frac{1}{2}}$ с использованием граничного условия (39), аналогично, трехточечными прогонками по направлению y *вычисляются* T^{n+1} с использованием граничного условия $T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$. Схема абсолютно устойчива. В трехмерной задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), a^2 = const, \\ T \Big|_{t=t_0} &= d(x, y, z), T \Big|_S = \varphi(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (43)$$

на равномерной сетке

$$h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, h_{zk+1} = h_{zk} = h_z$$

используются операторы

$$A_1 = \frac{a^2}{h_x^2} (\Delta_{+1} - \Delta_{-1}), A_2 = \frac{a^2}{h_y^2} (\Delta_{+2} - \Delta_{-2}), A_3 = \frac{a^2}{h_z^2} (\Delta_{+3} - \Delta_{-3}),$$

и схема *Дугласа-Ракфорда* имеет конструкцию

$$\frac{T^{n+\frac{1}{3}} - T^n}{\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{3}} + A_2 T^n + A_3 T^n, \quad (44)$$

$$\frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = A_2 (T^{n+\frac{2}{3}} - T^n),$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = A_3 (T^{n+1} - T^n), \quad T^0 = d, \quad T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$$

По теории *Дьяконова* из (44) вытекают граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = \varphi^n + (E - \tau A_2)(E - \tau A_3)(\varphi^{n+1} - \varphi^n), \quad (45)$$

$$T^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} y=0 \\ y=a_2 \end{smallmatrix} \right)} = \varphi^n + (E - \tau A_3)(\varphi^{n+1} - \varphi^n) \quad (46)$$

Только на основании (45)-(46) из системы (44) можно исключить $T^{n+\frac{1}{3}}, T^{n+\frac{2}{3}}$ и тем самым получить схему в целых шагах, эквивалентную схеме *Дугласа-Ракфорда*:

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)(E - \tau A_3) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = A_1 T^n + A_2 T^n + A_3 T^n, \quad (47)$$

В данном случае *погрешность аппроксимации* равна $\psi^n(x_i, y_j, z_k) = O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}$

Обратно, для получения схемы (44) в (47) вводят обозначения

$$(E - \tau A_2)(E - \tau A_3) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{T^{n+\frac{1}{3}} - T^n}{\tau}, \quad (48)$$

$$(E - \tau A_3) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^n}{\tau} \quad (49)$$

Очевидно, из (47),(48), (49) получается схема *Дугласа-Ракфорда* (44). Алгоритм реализации простой. Трехточечными прогонками по направлению x вычисляются $T^{n+\frac{1}{3}}$ с

использованием граничного условия (45), трехточечными прогонками по направлению y вычисляются $T^{n+\frac{2}{3}}$ с использованием граничного условия (46), аналогично, трехточечными прогонками по направлению z вычисляются T^{n+1} с использованием граничного условия $T^{n+1}|_{S_h} = \varphi^{n+1}$.
 Схема *Дугласа-Ракфорда* абсолютно устойчива.

§9. Схема расщепления *Н.Н.Яненко*

В 1959г. *Н.Н.Яненко* опубликовал схему расщепления /12/:

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}}, \quad (50)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = A_2 T^{n+1}, T^0 = d, T^{n+1}|_{S_h} = \varphi^{n+1} \quad (51)$$

По теории *Дьяконова Е.Г.* из (51) вытекает правильное граничное условие

$$T^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h \begin{matrix} (x=0) \\ (x=a_1) \end{matrix}} = (E - \tau A_2) \varphi^{n+1}$$

Только в этом случае схема (50)-(51) будет эквивалентна схеме в целых шагах

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)T^{n+1} = T^n,$$

и в данном случае *погрешность аппроксимации* равна

$$\psi^n(x_i, y_j) = O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t_0}$$

Схема устойчива, ибо

$$T^{n+1} = (E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}T^n,$$

и по лемме-4а норма оператора перехода не превосходит 1:

$$\|(E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}\| \leq \| (E - \tau A_2)^{-1} \| \| (E - \tau A_1)^{-1} \| \leq 1,$$

следовательно, имеют место неравенства, доказывающие абсолютную устойчивость схемы *Н.Н.Яненко*

$$\begin{aligned} \|T^{n+1}\| &= \|(E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}T^n\| \leq \\ &\leq \|(E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}\| \|T^n\| \leq \|T^n\|, \end{aligned}$$

$$\| T^{n+1} \| \leq \| T^n \| \leq \| T^{n-1} \| \leq \dots \leq \| T^0 \|$$

§10. Метод факторизации Марчука-Яненко

Идея метода излагается на следующих примерах. Введем обобщенные одномерные разностные операторы $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$.

Пусть имеет место неявная схема

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^{n+1} + \hat{\Lambda}_2 C^{n+1} + f^n,$$

эквивалентная следующей схеме

$$[E - \tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2)] \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + f^n, \quad (52)$$

В методе факторизации суммарный оператор заменяется приближенно на произведение одномерных операторов

$$[E - \tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2)] \approx (E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2) \quad (53)$$

Очевидно погрешность такой замены порядка $O(\tau_{n+1}^2)$. В (52) суммарный оператор заменяется на (53), в результате получается схема с факторизованным оператором в левой части

$$(E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + f^n, \quad (54)$$

которая легко реализуется. Вводится промежуточная величина

$$(E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = C^{n+\frac{1}{2}} \quad (55)$$

Подставляется в (54):

$$(E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1) C^{n+\frac{1}{2}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + f^n, \quad (56)$$

По теории Дьяконова Е.Г. из (55) вытекает граничное условие

$$C^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = (E - \tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau_{n+1}} \varphi^{n+1} \quad (57)$$

Сперва из (56) находится $C^{n+\frac{1}{2}}$, затем из (55) вычисляется искомая величина C^{n+1} .

Если ввести промежуточную величину по другому

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \frac{C^{n+\frac{1}{2}} - C^n}{\tau_{n+1}},$$

то можно сконструировать схему, подобную вышеизложенной схеме *Дугласа-Ракфорда*.

Рассмотрим трехмерную схему

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^{n+1} + \hat{\Lambda}_2 C^{n+1} + \hat{\Lambda}_3 C^{n+1} + f^n \quad (58)$$

в эквивалентной форме

$$[E - \tau_{n+1} (\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_3)] \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + \hat{\Lambda}_3 C^n + f^n \quad (59)$$

Суммарный оператор факторизуем произведением одномерных

$$\begin{aligned} & [E - \tau_{n+1} (\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_3)] \approx \\ & \approx (E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \end{aligned} \quad (60)$$

Погрешность здесь $O(\tau_{n+1}^2)$. На основании замены (60) из (59) вытекает

$$\begin{aligned} & (E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \\ & = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + \hat{\Lambda}_3 C^n + f^n, \end{aligned} \quad (61)$$

Вводится промежуточная величина

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = C^{n+\frac{1}{3}} \quad (62)$$

Подставляя в (61), получаем 1-й дробный шаг

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_1) C^{n+\frac{1}{3}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + \hat{\Lambda}_3 C^n + f^n, \quad (63)$$

В (62) обозначим

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = C^{n+\frac{2}{3}} \quad (64)$$

После подстановки в (62) получается 2-й дробный шаг

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2) C^{n+\frac{2}{3}} = C^{n+\frac{1}{3}} \quad (65)$$

3-м дробным шагом будет (64)

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = C^{n+\frac{2}{3}} \quad (66)$$

По Дьяконову *Е.Г.* правильные граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} C^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} &= (E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau_{n+1}}, \\ C^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} y=0 \\ y=a_2 \end{smallmatrix} \right)} &= (E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau_{n+1}} \end{aligned} \quad (67)$$

Из (63) вычисляется $C^{n+\frac{1}{3}}$, затем из (65) определяется $C^{n+\frac{2}{3}}$, лишь потом находится из (66) C^{n+1} . Далее применяются леммы в норме C , доказанные Джакуповым *К.Б.* в [13].

Лемма-6а. Если линейные операторы, отображающие пространство H в пространство H , $k \leq M, k = 1, \dots, M$ имеют неотрицательные элементы

$$\begin{aligned} E - \tau \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \right] \prod_{m=M}^k [E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1}, \\ \tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

то их C -норма не превосходит 1:

$$\| E - \tau \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \right] \prod_{m=M}^k [E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \leq 1$$

Доказательство. По определению нормы линейного оператора

$$\begin{aligned} &\| E - \tau \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \right] \prod_{m=M}^k [E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| = \\ &= \sup_{\substack{\Psi \in H \\ \|\Psi\|=1}} \| E - \tau \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) \right] \prod_{m=M}^k [E + \tau (c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \Psi \| \end{aligned}$$

Обозначив $\Lambda_m \equiv -(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})$, перепишем в виде

$$\| E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \| = \sup_{\substack{\Psi \in H \\ \|\Psi\|=1}} \| E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \Psi \| \quad (68)$$

Вводится сеточная функция

$$\Phi = \prod_{m=M}^k [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \Psi, \Phi \in H,$$

$$\Psi = \prod_{m=M}^k [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})] \Phi,$$

в силу чего (68) примет вид

$$\begin{aligned} & \| E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \| = \\ & = \sup_{\substack{\Psi \in H \\ \|\Psi\|=1}} \| \{ \prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \} \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \Psi \| \end{aligned}$$

С помощью данного элемента (68) записывается в С-норме

$$\begin{aligned} & \| E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \| = \\ & = \sup_{\substack{\Phi \in H \\ \|\prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] \Phi\|=1}} \max_{x \in \Omega_h} | \{ \prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \} \Phi | \quad (69) \end{aligned}$$

Так как норма $\|\Psi\|=1$, то по лемме-4а имеет место

$$\begin{aligned} \| \Phi \| & = \| \prod_{m=M}^k [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \Psi \| \leq \\ & \leq \prod_{m=M}^k \| [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \Psi \| \leq \\ & \leq \prod_{m=M}^k \| [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \| \Psi \| = \\ & = \prod_{m=M}^k \| [E + \tau(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m})]^{-1} \| \leq 1, \end{aligned}$$

откуда вытекает условие

$$\|\Phi\| \leq 1 \quad (70)$$

Кроме этого, имеется еще одно заданное условие

$$\|\Psi\| = \left\| \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m] \Phi \right\| = 1 \quad (71)$$

Нужно доказать для произвольного $\Phi \in H$, удовлетворяющего условиям (70)-(71), что при выполнении условий леммы-ба вытекает неравенство

$$\max_{x \in \Omega_h} \left| \left\{ \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \right\} \Phi \right| \leq 1 \quad (72)$$

Пусть максимум модуля в (72) достигается в некоторой точке $x^0 \in \Omega_h$ (ясно, что таких точек может быть больше одной).

Обозначим $\Phi(x^0) \equiv \Phi^0$, $c_{\pm m}(x^0) \equiv c_{\pm m}^0$.

В этом случае доказываемое неравенство (72)

$$\left| \left\{ \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \right\} \Phi^0 \right| \leq 1 \quad (73)$$

будет эквивалентно двум неравенствам

$$-1 \leq \left\{ \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \right\} \Phi^0 \leq 1$$

Введем функцию $D_1(\Phi^0) \equiv \left\{ \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m] + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \right\} \Phi^0$,

$$D_1(\Phi^0) \equiv \left\{ \prod_{m=k}^M [E + \tau c_{-m}^0 (\Phi^0 - T_{-m} \Phi^0) - \tau c_{+m}^0 (T_{+m} \Phi^0 - \Phi^0)] - \tau \sum_{m=k}^M [c_{-m}^0 (\Phi^0 - T_{-m} \Phi^0) - c_{+m}^0 (T_{+m} \Phi^0 - \Phi^0)] \right\}$$

В силу (73) необходимо доказать выполнение неравенств

$$-1 \leq D_1(\Phi^0) \leq 1 \quad (74)$$

Введем сеточные функции $D_1(\Phi^0) = D_2(\Phi^0) + D_3(\Phi^0)$,

$$D_2(\Phi^0) \equiv \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m] \Phi^0, \quad D_3(\Phi^0) \equiv \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \Phi^0.$$

Тогда (74) запишется в виде суммы

$$-1 \leq D_1(\Phi^0) = D_2(\Phi^0) + D_3(\Phi^0) \leq 1 \quad (75)$$

Из (71) вытекают два опорных неравенства

$$-1 \leq D_2(\Phi^0) \equiv \prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] \Phi^0 \leq 1 \quad (76)$$

Рассмотрим возможные два случая: 1) $D_1(\Phi^0) \geq 0$, 2) $D_1(\Phi^0) \leq 0$. Если в случае 1) $D_1(\Phi^0) \geq 0$ выполняется также

неравенство $D_3(\Phi^0) \equiv \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \Phi^0 \leq 0$, то при таком сочетании

(75) выполняется из-за (76), тем самым выполняется (73), т.е. лемма-ба справедлива. Пусть теперь в первом случае имеет

место противоположное: $D_3(\Phi^0) \equiv \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \Phi^0 \geq 0$. Тогда из

этого неравенства вытекает

$$\Phi^0 \leq \frac{\sum_{m=k}^M (c_{-m}^0 T_{-m} \Phi^0 + c_{+m}^0 T_{+m} \Phi^0)}{\sum_{m=k}^M (c_{-m}^0 + c_{+m}^0)} \equiv \tilde{\Phi}^0 \quad (77)$$

В первом случае функция $D_1(\Phi^0) \geq 0$ есть строго возрастающая функция, потому что ее производная положительна

$$\begin{aligned} \frac{dD_1(\Phi^0)}{d\Phi^0} &= \frac{dD_2(\Phi^0)}{d\Phi^0} + \frac{dD_3(\Phi^0)}{d\Phi^0} = 1 + \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}^0 + c_{+m}^0) + \\ &+ \tau^2 \sum_{m=k}^M \sum_{\substack{n=k \\ m \neq n}}^m (c_{-m}^0 + c_{+m}^0)(c_{-n}^0 + c_{+n}^0) + \dots + \tau^{M-k} \prod_{m=k}^M (c_{-m}^0 + c_{+m}^0) - \\ &- \tau \sum_{m=k}^M (c_{-m}^0 + c_{+m}^0) > 0 \end{aligned}$$

Согласно (77) при достижении верхней границы $\Phi^0 = \tilde{\Phi}^0$ функция обращается в нуль: $D_3(\tilde{\Phi}^0) = 0$, поэтому в силу (76) вытекает $0 \leq D_1(\tilde{\Phi}^0) = D_2(\tilde{\Phi}^0) + 0 \leq 1$, а по (77) аргумент

$\Phi^0 \leq \tilde{\Phi}^0$, следовательно, для строго возрастающей функции имеет место неравенство $0 \leq D_1(\Phi^0) \leq D_1(\tilde{\Phi}^0) \leq 1$, лемма-6а доказана еще раз. Во втором случае 2) $D_1(\Phi^0) \leq 0$ доказательство проводится аналогично, тем самым завершается полное доказательство леммы.

Лемма-6б. Если линейные операторы, отображающие пространство H в пространство H ,

$$E - \tau \prod_{m=M}^k [E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) \right],$$

$k \leq M, k = 1, \dots, M$ имеют неотрицательные элементы

$$\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}_h\}, m = 1, \dots, M,$$

то их C -норма не превосходит 1:

$$\|E - \tau \prod_{m=M}^k [E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \left[\sum_{m=k}^M (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) \right]\| \leq 1$$

Несложное доказательство леммы-6б вытекает из теории матриц. Две квадратные матрицы A, \tilde{A} эквивалентны друг другу, если существует такая невырожденная матрица T , что имеют место равенства $A = T\tilde{A}T^{-1}, \tilde{A} = T^{-1}AT$. Эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранг, след и определители.

Обозначим, как и ранее $\Lambda_m \equiv -(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})$. Тогда из

$$A = E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m]^{-1},$$

$$\tilde{A} = E + \tau \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m]^{-1} \sum_{m=k}^M \Lambda_m, A = E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m]^{-1},$$

$$T^{-1} = \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m]^{-1}, T = \prod_{m=k}^M [E - \tau\Lambda_m],$$

вытекает эквивалентность между собой A, \tilde{A} . В самом деле

$$E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau\Lambda_m]^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] \{E + \tau \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \sum_{m=k}^M \Lambda_m\} \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}, \\
&\quad E + \tau \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \sum_{m=k}^M \Lambda_m = \\
&= \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \{E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}\} \prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] \quad (78)
\end{aligned}$$

Следовательно, в лемме-6а и лемме-6б оцениваются нормы эквивалентных операторов. Доказательство леммы-6б следует из (78). Умножая (78) справа на оператор $\prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}$,

установим

$$\begin{aligned}
&\{E + \tau \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \sum_{m=k}^M \Lambda_m\} \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} = \\
&= \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \{E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}\}, \quad (79)
\end{aligned}$$

потому как

$$\prod_{m=k}^M [E - \tau \Lambda_m] \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} = E$$

При оценке нормы (79) примем во внимание леммы-4а и -6а

$$\begin{aligned}
&\| \{E + \tau \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \sum_{m=k}^M \Lambda_m\} \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \| = \\
&= \| \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \{E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}\} \| \leq \\
&\leq \prod_{m=M}^k \| [E - \tau \Lambda_m]^{-1} \| \| \{E + \tau \sum_{m=k}^M \Lambda_m \prod_{m=M}^k [E - \tau \Lambda_m]^{-1}\} \| \leq 1, \text{ ч.т.д.}
\end{aligned}$$

Для доказательства устойчивости схемы (47)

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)(E - \tau A_3) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = A_1 T^n + A_2 T^n + A_3 T^n, \quad (80)$$

воспользуемся этими леммами, сделав сопоставление:

$$\Lambda_m = -(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) = A_m, m = 1,2,3,$$

$$c_{\pm 1} = a^2 / h_x^2, c_{\pm 2} = a^2 / h_y^2, c_{\pm 3} = a^2 / h_z^2,$$

на неравномерной сетке коэффициенты равны

$$c_{+1} = \frac{a^2}{h_{xi+1}h_{xi}}, c_{-1} = \frac{a^2}{h_{xi}h_{xi}}, c_{+2} = \frac{a^2}{h_{yj+1}h_{yj}}, c_{-2} = \frac{a^2}{h_{yj}h_{yj}},$$

$$c_{+3} = \frac{a^2}{h_{zk+1}h_{zk}}, c_{-3} = \frac{a^2}{h_{zk}h_{zk}},$$

Сведем (80) к форме с факторизованным оператором

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)(E - \tau A_3) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = A_1 T^n + A_2 T^n + A_3 T^n,$$

$$T^{n+1} = [E + (E - \tau A_3)^{-1}(E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1} \tau (A_1 + A_2 + A_3)] T^n,$$

что в краткой записи имеет вид

$$T^{n+1} = [E + \tau \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^3 A_m] T^n$$

Операторы A_m удовлетворяют условиям лемм-ба и -бб,

$$\text{поэтому } \|[E + \tau \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^3 A_m]\| \leq 1,$$

$$\|T^{n+1}\| \leq \|[E + \tau \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^3 A_m] T^n\| \leq$$

$$\leq \|[E + \tau \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^3 A_m]\| \|T^n\| \leq 1^* \|T^n\|,$$

$$\|T^{n+1}\| \leq \|T^n\|, n = 0,1,2,\dots,$$

откуда следует $\|T^{n+1}\| \leq \|T^0\|, n = 0,1,2,\dots$

Следовательно, схема *Дугласа-Ракфорда* (47) абсолютно устойчива. Операторы A_m перестановочны: $A_m A_k = A_k A_m$, поэтому, можно использовать лемму-ба, потому как

$$E + \tau \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^3 A_m = E + \tau \sum_{m=1}^3 A_m \prod_{m=3}^1 (E - \tau A_m)^{-1}$$

Устойчивость факторизованной схемы

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \\ = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + \hat{\Lambda}_3 C^n + f^n,$$

вытекает из данных лемм. В общем случае непрерывных операторов необходимо воспользоваться леммой-6б):

$$\Lambda_m = -(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) = \hat{\Lambda}_m, m = 1, 2, 3, \\ c_{+1} = \frac{D}{h_{xi+1} \hat{h}_{xi}} + \frac{|u_{ijk}| - u_{ijk}}{2h_{xi+1}}, c_{-1} = \frac{D}{h_{xi} \hat{h}_{xi}} + \frac{|u_{ijk}| + u_{ijk}}{2h_{xi}}, \\ c_{+2} = \frac{D}{h_{yj+1} \hat{h}_{yj}} + \frac{|v_{ijk}| - v_{ijk}}{2h_{yj+1}}, c_{-2} = \frac{D}{h_{yj} \hat{h}_{yj}} + \frac{|v_{ijk}| + v_{ijk}}{2h_{yj}}, \\ c_{+3} = \frac{D}{h_{zk+1} \hat{h}_{zk}} + \frac{|w_{ijk}| - w_{ijk}}{2h_{zk+1}}, c_{-3} = \frac{D}{h_{zk} \hat{h}_{zk}} + \frac{|w_{ijk}| + w_{ijk}}{2h_{zk}}$$

§11. Схема расщепления с весами. Проблема определения граничных значений промежуточных величин

Для численного решения уравнений типа

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), a^2 = const, \quad (80)$$

$$p|_{t=t_0} = d(x, y, z), p|_S = \varphi(x, y, z, t) \quad (81)$$

по схеме расщепления с весами $\alpha, 1 - \alpha$

$$\frac{p^{n+\frac{1}{3}} - p^n}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha p^{n+\frac{1}{3}} + (1-\alpha) p^n], x \in \Omega_h, \quad (82)$$

$$\frac{p^{n+\frac{2}{3}} - p^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 [\alpha p^{n+\frac{2}{3}} + (1-\alpha) p^{n+\frac{1}{3}}], x \in \Omega_h, \quad (83)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 [\alpha p^{n+1} + (1-\alpha) p^{n+\frac{2}{3}}], x \in \Omega_h, \quad (84)$$

$$p^0 = d, p^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1} \quad (85)$$

необходимы краевые условия для промежуточных величин $p^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}}$. Известно (Самарский А.А.), что в этой схеме принципиально невозможно поставить граничные условия для $p^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}}$, тем более для граничных условий 2 или 3 родов.

Граничные условия типа $p^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{2}{3}}$ здесь нельзя применять, потому как по теории Дьяконова Е.Г. из (84), преобразованного к виду

$$p^{n+1} - \tau\alpha\Lambda_3 p^{n+1} = p^{n+\frac{2}{3}} + \tau(1-\alpha)\Lambda_3 p^{n+\frac{2}{3}},$$

$$(E - \tau\alpha\Lambda_3)p^{n+1} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]p^{n+\frac{2}{3}}, x \in \Omega_h$$

вытекает точное вычисление граничного условия для $p^{n+\frac{2}{3}}$:

$$p^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_3)p^{n+1} \Big|_{S_h} \quad (86)$$

Для краевого условия Дирихле $p^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$ (86) принимает вид

$$p^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_3)\varphi^{n+1} \quad (87)$$

Возникает неразрешимая проблема нахождения обратного оператора $[E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}$ в (87) при $\alpha \neq 1$. Для краевого

условия фон Неймана $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$ проблема постановки

граничного условия $p^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h}$ становится еще более неразрешимой даже при $\alpha = 1$ не только в данной схеме с весами, но и в других схемах метода переменных направлений.

Граничные значения другой промежуточной величины $p^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h}$

определяются из (83), преобразованной к виду

$$(E - \tau\alpha\Lambda_2) p^{n+\frac{2}{3}} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2] p^{n+\frac{1}{3}}, x \in \Omega_h,$$

$$p^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]^{-1} (E - \tau\alpha\Lambda_2) p^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h} \quad (88)$$

Подставляя (87) в (88)

$$p^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]^{-1} (E - \tau\alpha\Lambda_2) [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1} (E - \tau\alpha\Lambda_3) \varphi^{n+1},$$

убеждаемся в невозможности вычислений граничных условий для промежуточных величин даже для краевых условий *Дирихле*, не говоря о краевых условиях типа *фон Неймана*.

§12. Монотонные однородные схемы 2 порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с постоянным коэффициентом молекулярного переноса

Для построения монотонных однородных схем 2 порядка аппроксимации конвективных членов в многомерных уравнениях вязкой жидкости используется методика *Джакупова К.Б.* /20/, примененная в модуле-5.

Для двумерного уравнения параболического типа

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + f, \omega|_{t=0} = d, \omega|_S = \varphi,$$

монотонная явная схема имеет вид

$$\rho \left(\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \omega_x^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \omega_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} \omega_y^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \omega_y^n \right) =$$

$$= \frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} (\omega_x^n - \omega_x^n) + \frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} (\omega_y^n - \omega_y^n) + f_{ij}^n,$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q = 1 + \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right),$$

$$\mu_x^v = [\mu + \rho(\frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1})] / Q,$$

$$\mu_y^u = [\mu + \rho(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1})] / Q,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

На равномерной сетке $h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j, h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i$ данные коэффициенты упрощаются

$$\mu_x^v = (\mu + \rho \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2}) / [1 + \rho(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2\mu} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2\mu})],$$

$$\mu_y^u = (\mu + \rho \frac{|u_{ij}^n| h_x}{2}) / [1 + \rho(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2\mu} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2\mu})]$$

Схема устойчива и сходится в норме C при выполнении условия

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}} - \left[\rho \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2h_{xi}} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{2h_{xi+1}} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2h_{yj}} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{2h_{yj+1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) \right] \geq 0, \quad \forall (i, j, n)$$

Нетрудно построить по данной методике безусловно сходящиеся и устойчивые схемы типа *Кранка-Николсона* или схемы метода дробных шагов. Именно в работе /20/ аналогичная аппроксимация применена для уравнений *Гельмгольца*.

Для трехмерного уравнения параболического типа

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + f,$$

монотонная однородная явная схема имеет вид

$$\rho \left(\frac{\omega_{ijk}^{n+1} - \omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{2} \omega_x^n + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{2} \omega_x^n + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{2} \omega_y^n + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{2} \omega_y^n + \right. \\ \left. + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{2} \omega_z^n + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{2} \omega_z^n \right) = \frac{2\mu_x^{vw}}{h_{xi+1} + h_{xi}} (\omega_x^n - \alpha_x^n) + \frac{2\mu_y^{wu}}{h_{yj+1} + h_{yj}} (\omega_y^n - \alpha_y^n) +$$

$$+ \frac{2\mu_z^{uv}}{h_{zk+1} + h_{zk}} (\omega_z^n - \alpha_z^n) + f_{ijk}^n, i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1,$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q = 1 + \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{|u_{ijk}^n| + |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ijk}^n| + |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj+1} + \right. \\ \left. + \frac{|w_{ijk}^n| + |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk+1} \right),$$

$$\mu_x^{vw} = [\mu + \rho \left(\frac{|v_{ijk}^n| + |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj+1} + \frac{|w_{ijk}^n| + |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk+1} \right)] Q,$$

$$\mu_y^{wu} = [\mu + \rho \left(\frac{|w_{ijk}^n| + |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - |w_{ijk}^n|}{4} h_{zk+1} + \frac{|u_{ijk}^n| + |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi+1} \right)] Q,$$

$$\mu_z^{uv} = [\mu + \rho \left(\frac{|u_{ijk}^n| + |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - |u_{ijk}^n|}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ijk}^n| + |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - |v_{ijk}^n|}{4} h_{yj+1} \right)] Q$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, h_{zk+1} = h_{zk} = h_z$:

$$Q = 1 + \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{|u_{ijk}^n|}{2} h_x + \frac{|v_{ijk}^n|}{2} h_y + \frac{|w_{ijk}^n|}{2} h_z \right), \mu_x^{vw} = [\mu + \rho \left(\frac{|v_{ijk}^n|}{2} h_y + \frac{|w_{ijk}^n|}{2} h_z \right)] Q,$$

$$\mu_y^{wu} = [\mu + \rho \left(\frac{|w_{ijk}^n|}{2} h_z + \frac{|u_{ijk}^n|}{2} h_x \right)] Q, \mu_z^{uv} = [\mu + \rho \left(\frac{|u_{ijk}^n|}{2} h_x + \frac{|v_{ijk}^n|}{2} h_y \right)] Q$$

Условие устойчивости и сходимости в норме C :

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}} - \left[\rho \left(\frac{|u_{ijk}^n| + |u_{ijk}^n|}{2h_{xi}} + \frac{|u_{ijk}^n| - |u_{ijk}^n|}{2h_{xi+1}} + \frac{|v_{ijk}^n| + |v_{ijk}^n|}{2h_{yj}} + \frac{|v_{ijk}^n| - |v_{ijk}^n|}{2h_{yj+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|w_{ijk}^n| + |w_{ijk}^n|}{2h_{zk}} + \frac{|w_{ijk}^n| - |w_{ijk}^n|}{2h_{zk+1}} \right) + \frac{2\mu_x^{vw}}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\mu_y^{wu}}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) + \frac{2\mu_z^{uv}}{h_{zk+1} + h_{zk}} \left(\frac{1}{h_{zk+1}} + \frac{1}{h_{zk}} \right) \right] \geq 0, \quad \forall(i, j, k, n)$$

§13. Монотонные однородные схемы 2 порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с переменным коэффициентом молекулярного переноса

Методика Джакупова К.Б. /20/ применима и для уравнений с переменным коэффициентом.

Рассмотрим одномерное уравнение с переменным коэффициентом молекулярного переноса $\mu = \mu(x, t) > 0$:

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + f,$$

$$\omega|_{t=0} = d, \omega(0, t) = \varphi_1(t), \omega(a, t) = \varphi_2(t), 0 \leq x \leq a, t \in [0, T]$$

Для дифференцируемой функции $\mu = \mu(x, t)$ это уравнение можно преобразовать к виду

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\rho u - \frac{\partial \mu}{\partial x}) \frac{\partial \omega}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f$$

и построить для него монотонную схему §12. Такой подход применен для уравнений метеорологии в /3/. В случае разрывного не дифференцируемого коэффициента $\mu = \mu(x, t)$, очевидно, данное преобразование неприемлемо. Здесь технология построения монотонных схем 2-го порядка аппроксимации конвективных членов применяется к эквивалентному уравнению

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(\mu - \mu_{\min}) \frac{\partial \omega}{\partial x}] + \mu_{\min} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f,$$

где обозначено через μ_{\min} минимальное значение функции $\mu(x, t) \geq \mu_{\min} = const$. По технологии /20/ получаются монотонные схемы эквивалентного уравнения для $k > 1$:

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_i^n + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}}) = \\ & = \left\{ \frac{\mu_{\min}}{\sum_{k=0}^M \left[\frac{\rho}{2\mu_{\min}} \left(\frac{|u_i^n| + u_i^n}{2} h_{xi} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2} h_{xi+1} \right) \right]^k} - \mu_{\min} \right\} * \end{aligned}$$

$$* \frac{1}{\tilde{h}_{xi}} \left(\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{h}_{xi}} \left(\frac{\mu_{i+1}^n + \mu_i^n}{2} \frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\mu_i^n + \mu_{i-1}^n}{2} \frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) + f_i^n,$$

с аппроксимацией 2-го порядка и выше конвективного члена.

Для двумерного уравнения параболического типа

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + f$$

монотонные схемы аналогичны по конструкции:

$$\rho \left(\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \omega_x^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \omega_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} \omega_y^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \omega_y^n \right) =$$

$$= (\mu_{uxv}^v - \mu_{\min}) \frac{1}{\tilde{h}_{xi}} (\omega_x^n - \omega_x^n) + (\mu_{vyu}^u - \mu_{\min}) \frac{1}{\tilde{h}_{yj}} (\omega_y^n - \omega_y^n) +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{h}_{xi}} \left(\frac{\mu_{i+1j}^n + \mu_{ij}^n}{2} \omega_x^n - \frac{\mu_{ij}^n + \mu_{i-1j}^n}{2} \omega_x^n \right) + \frac{1}{\tilde{h}_{yj}} \left(\frac{\mu_{ij+1}^n + \mu_{ij}^n}{2} \omega_y^n - \frac{\mu_{ij}^n + \mu_{ij-1}^n}{2} \omega_y^n \right) + f_{ij}^n,$$

где коэффициенты имеют вид

$$Q = 1 + \frac{\rho}{\mu_{\min}} \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right),$$

$$\mu_x^v = [\mu_{\min} + \rho \left(\frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right)] / Q,$$

$$\mu_y^u = [\mu_{\min} + \rho \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} \right)] / Q$$

Для трехмерного уравнения параболического типа

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + f,$$

монотонные схемы аналогичны предыдущим:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\omega_{ijk}^{n+1} - \omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{2} \omega_x^n + \frac{u_{ijk}^n - |u_{ijk}^n|}{2} \omega_x^n + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{2} \omega_y^n + \frac{v_{ijk}^n - |v_{ijk}^n|}{2} \omega_y^n + \\
& + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{2} \omega_z^n + \frac{w_{ijk}^n - |w_{ijk}^n|}{2} \omega_z^n = (\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{xi}} (\omega_x^n - \omega_x^n) + \\
& + (\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{yj}} (\omega_y^n - \omega_y^n) + (\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{zk}} (\omega_z^n - \omega_z^n) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\mu_{i+1jk}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_x^n - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{i-1jk}^n}{2} \omega_x^n \right) + \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\mu_{ij+1k}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_y^n - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ij-1k}^n}{2} \omega_y^n \right) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\mu_{ijk+1}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_z^n - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ijk-1}^n}{2} \omega_z^n \right) + f_{ijk}^n, \\
& i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1,
\end{aligned}$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$\begin{aligned}
Q = 1 + \frac{\rho}{\mu_{\min}} & \left(\frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi+1} + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj+1} + \right. \\
& \left. + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk+1} \right), \\
\mu_x^{vw} = & [\mu_{\min} + \rho \left(\frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj+1} + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk+1} \right)] Q \\
\mu_y^{wu} = & [\mu_{\min} + \rho \left(\frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk} + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{4} \hbar_{zk+1} + \frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi+1} \right)] Q \\
\mu_z^{uv} = & [\mu_{\min} + \rho \left(\frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi} + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{4} \hbar_{xi+1} + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj} + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{4} \hbar_{yj+1} \right)] Q
\end{aligned}$$

Условие устойчивости явной схемы

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}} - \left[\rho \left(\frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{2\hbar_{xi}} + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{2\hbar_{xi+1}} + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{2\hbar_{yj}} + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{2\hbar_{yj+1}} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{2h_{zk}} + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{2h_{zk+1}} + (\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \\
& + (\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) + (\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{zk}} \left(\frac{1}{h_{zk+1}} + \frac{1}{h_{zk}} \right) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\mu_{i+1,jk}^n + \mu_{ijk}^n}{2h_{xi+1}} + \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{i-1,jk}^n}{2h_{xi}} \right) + \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{\mu_{ij+1k}^n + \mu_{ijk}^n}{2h_{yj+1}} + \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ij-1k}^n}{2h_{yj}} \right) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{zk}} \left(\frac{\mu_{ijk+1}^n + \mu_{ijk}^n}{2h_{zk+1}} + \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ijk-1}^n}{2h_{zk}} \right)] \geq 0, \quad \forall(i, j, k, n)
\end{aligned}$$

§14. Эффективная реализация неявных схем методом Якоби

Проблемы постановки граничных условий для промежуточных сеточных функций типа $T^{n+\frac{1}{3}}, T^{n+\frac{2}{3}}$ и т.п. усугубляются для краевых условий 2-го или 3-го родов, тем более в областях с криволинейной границей, да и трехточечные или пятиточечные и прочие виды методов прогонки занимают много времени при программировании и счете. С этой точки зрения экономичным является применение абсолютно устойчивых неявных схем типа

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\omega_{ijk}^{n+1} - \omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{2} \omega_x^{n+1} + \frac{u_{ijk}^n - |u_{ijk}^n|}{2} \omega_x^{n+1} + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{2} \omega_y^{n+1} + \frac{v_{ijk}^n - |v_{ijk}^n|}{2} \omega_y^{n+1} + \right. \\
& + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{2} \omega_z^{n+1} + \left. \frac{w_{ijk}^n - |w_{ijk}^n|}{2} \omega_z^{n+1} \right) = (\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{xi}} (\omega_x^{n+1} - \omega_x^{n+1}) + \\
& + (\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{yj}} (\omega_y^{n+1} - \omega_y^{n+1}) + (\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) \frac{1}{\hbar_{zk}} (\omega_z^{n+1} - \omega_z^{n+1}) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\mu_{i+1,jk}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_x^{n+1} - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{i-1,jk}^n}{2} \omega_x^{n+1} \right) + \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{\mu_{ij+1k}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_y^{n+1} - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ij-1k}^n}{2} \omega_y^{n+1} \right) + \\
& + \frac{1}{\hbar_{zk}} \left(\frac{\mu_{ijk+1}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_x^{n+1} - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ijk-1}^n}{2} \omega_x^{n+1} \right) + \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{\mu_{ij+1k}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_y^{n+1} - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ij-1k}^n}{2} \omega_y^{n+1} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\hbar_{zk}} \left(\frac{\mu_{ijk+1}^n + \mu_{ijk}^n}{2} \omega_z^{n+1} - \frac{\mu_{ijk}^n + \mu_{ijk-1}^n}{2} \omega_z^{n+1} \right) + f_{ijk}^{n+1}, \\
& i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1, \quad (1) \\
& \omega^0 = d, \omega^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}
\end{aligned}$$

Данная неявная схема, как и другие неявные схемы, рассмотренные ранее, в том числе и схемы типа Кранка-Николсона, представляют собою систему линейных алгебраических уравнений относительно величин, взятых на верхнем слое времени типа здесь стоящих $\omega_{ijk}^{n+1}, i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1$.

Причем эти системы имеют *строгое диагональное преобладание* из-за наличия членов вида $\frac{\rho \omega_{ijk}^{n+1}}{\tau_{n+1}}$, следовательно, выполняется

условие сходимости итерационного метода Якоби.

Введем в схеме (1) коэффициенты

$$\begin{aligned}
c_{+1}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) + (\mu_{i+1,jk}^n + \mu_{ijk}^n) / 2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ijk}^n| - u_{ijk}^n}{2h_{xi+1}}, \\
c_{-1}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^n + \mu_{i-1,jk}^n) / 2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ijk}^n| + u_{ijk}^n}{2h_{xi}}, \\
c_{+2}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) + (\mu_{ij+1,k}^n + \mu_{ijk}^n) / 2}{h_{yj+1} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ijk}^n| - v_{ijk}^n}{2h_{yj+1}}, \\
c_{-2}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^n + \mu_{ij-1,k}^n) / 2}{h_{yj} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ijk}^n| + v_{ijk}^n}{2h_{yj}}, \\
c_{+3}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk+1}^n + \mu_{ijk}^n) / 2}{h_{zk+1} \hbar_{zk}} + \frac{|w_{ijk}^n| - w_{ijk}^n}{2h_{zk+1}}, \\
c_{-3}^n &= \frac{1}{\rho} \frac{(\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^n + \mu_{ijk-1}^n) / 2}{h_{zk} \hbar_{zk}} + \frac{|w_{ijk}^n| + w_{ijk}^n}{2h_{zk}}, \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_1^n = c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}, \Lambda_2^n = c_{+2}^n \Delta_{+2} - c_{-2}^n \Delta_{-2}, \Lambda_3^n = c_{+3}^n \Delta_{+3} - c_{-3}^n \Delta_{-3},$$

затем перепишем в компактном виде

$$\frac{\omega_{ijk}^{n+1} - \omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} = (c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}) \omega^{n+1} + (c_{+2}^n \Delta_{+2} - c_{-2}^n \Delta_{-2}) \omega^{n+1} + (c_{+3}^n \Delta_{+3} - c_{-3}^n \Delta_{-3}) \omega^{n+1} + \frac{1}{\rho} f_{ijk}^{n+1}, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1, \omega_{ijk}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}^{n+1}, \\ n = 0, 1, \dots, N_\tau$$

Обозначим m -ую итерацию через $\omega_{ijk}^{n+1^m}$, в пределе для сходящегося итерационного процесса Якоби $\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{ijk}^{n+1^m} = \omega_{ijk}^{n+1}$.

Введем невязку m -итерации R_{ijk}^m :

$$R_{ijk}^m = \frac{\omega_{ijk}^{n+1^m} - \omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} - (c_{+1}^n \Delta_{+1} - c_{-1}^n \Delta_{-1}) \omega^{n+1^m} - (c_{+2}^n \Delta_{+2} - c_{-2}^n \Delta_{-2}) \omega^{n+1^m} - (c_{+3}^n \Delta_{+3} - c_{-3}^n \Delta_{-3}) \omega^{n+1^m} - \frac{1}{\rho} f_{ijk}^{n+1}, \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1,$$

$$\omega_{ijk}^{n+1^m} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}^{n+1}, R_{ijk}^m \Big|_{S_h} = \omega_{ijk}^{n+1^m} \Big|_{S_h} - \varphi_{ijk}^{n+1} = 0, m = 0, 1, \dots, m^*$$

Сгруппируем в (4) коэффициенты при $\omega_{ijk}^{n+1^m}$, имея ввиду

$$\Delta_{+l} = T_{+l} - E, \Delta_{-l} = E - T_{-l}, l = 1, 2, 3:$$

$$R_{ijk}^m = \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + c_{+1}^n + c_{-1}^n + c_{+2}^n + c_{-2}^n + c_{+3}^n + c_{-3}^n \right) \omega_{ijk}^{n+1^m} - \frac{\omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} - (c_{+1}^n T_{+1} + c_{-1}^n T_{-1}) \omega^{n+1^m} - (c_{+2}^n T_{+2} + c_{-2}^n T_{-2}) \omega^{n+1^m} - (c_{+3}^n T_{+3} + c_{-3}^n T_{-3}) \omega^{n+1^m} - \frac{1}{\rho} f_{ijk}^{n+1}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1$$

В методе Якоби используется алгоритм:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + c_{+1}^n + c_{-1}^n + c_{+2}^n + c_{-2}^n + c_{+3}^n + c_{-3}^n \right) \omega_{ijk}^{n+1^{m+1}} = \frac{\omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}} + \\ & + (c_{+1}^n T_{+1} + c_{-1}^n T_{-1}) \omega^{n+1^m} + (c_{+2}^n T_{+2} + c_{-2}^n T_{-2}) \omega^{n+1^m} + \\ & + (c_{+3}^n T_{+3} + c_{-3}^n T_{-3}) \omega^{n+1^m} + \frac{1}{\rho} f_{ijk}^{n+1}, \quad i=1, \dots, N_x-1, j=1, \dots, N_y-1, k=1, \dots, N_z-1 \end{aligned}$$

или эквивалентная запись

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + c_{+1}^n + c_{-1}^n + c_{+2}^n + c_{-2}^n + c_{+3}^n + c_{-3}^n \right) \omega_{ijk}^{n+1^{m+1}} = \\ & = \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + c_{+1}^n + c_{-1}^n + c_{+2}^n + c_{-2}^n + c_{+3}^n + c_{-3}^n \right) \omega_{ijk}^{n+1^m} - R_{ijk}^m, \\ & \quad i=1, \dots, N_x-1, j=1, \dots, N_y-1, k=1, \dots, N_z-1 \end{aligned}$$

Отсюда вычисляется $m+1$ - итерация $\omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}$ по формуле:

$$\begin{aligned} \omega_{ijk}^{n+1^{m+1}} & = \omega_{ijk}^{n+1^m} - R_{ijk}^m / \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + c_{+1}^n + c_{-1}^n + c_{+2}^n + c_{-2}^n + c_{+3}^n + c_{-3}^n \right), \\ & \quad i=1, \dots, N_x-1, j=1, \dots, N_y-1, k=1, \dots, N_z-1, \omega_{ijk}^{n+1^{m+1}} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}^{n+1} \end{aligned}$$

Итерации прекращаются при выполнении критерия из модуля-1

$$\begin{aligned} \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x-1 \\ 1 \leq j \leq N_y-1 \\ 1 \leq k \leq N_z-1}} |R_{ijk}^m| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \end{aligned}$$

Итак, на каждом слое времени.

Вопросы.

1. Используя лемму-4а доказать сходимость схемы Яненко.
2. Вычислить погрешность аппроксимации схемы Писмана-Ракфорда.
3. Вычислить погрешность аппроксимации схемы Дугласа-Ракфорда.
4. Вычислить погрешность аппроксимации схемы Яненко.
5. Доказать в сеточной норме С абсолютную устойчивость монотонных неявных схем типа изложенных в §12, §13.
6. Определить для $k=2, k=3, k=4$ погрешности аппроксимаций монотонных схем одномерных уравнений.

Модуль-7

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§1. Стационарные уравнения Гельмгольца

В стационарных течениях вязкой несжимаемой жидкости уравнения Гельмгольца принадлежат эллиптическому типу

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega,$$

ставятся краевые условия на S :

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \Big|_S = \varphi_u(x, y), \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \Big|_S = -\varphi_v(x, y),$$

откуда получаются краевые условия

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n} \Big|_S = \varphi_u(x, y) \cos(\vec{n}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y) \cos(\vec{n}; \vec{i}),$$

$$\psi(x, y) \Big|_S = \int_{S_0}^S [\varphi_u(x, y) \cos(\vec{s}; \vec{j}) - \varphi_v(x, y) \cos(\vec{s}; \vec{i})] ds$$

§2. Стационарные уравнения теплопроводности

Процессы распространения тепла в твердом теле описываются уравнениями эллиптического типа /1/:

двумерное $\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + F(x, y) = 0,$

ставится краевое условие Дирихле на S : $T(x, y) \Big|_S = \varphi(x, y);$

трехмерное $\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z) = 0,$

краевое условие Дирихле на S : $T(x, y, z) \Big|_S = \varphi(x, y, z)$

§3. Уравнения потенциала скорости

Безвихревые течения идеальной жидкости называются потенциальными течениями. Через потенциал скорости $\varphi = \varphi(x, y, z)$ компоненты скорости определяются так

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi, \quad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Подставляя $\vec{v} = \text{grad}\varphi$ в уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

получаем эллиптические уравнения:

двумерное
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

с краевым условием фон Неймана на S :

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \chi(x, y),$$

трехмерное
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

с краевым условием фон Неймана на S :

$$\left. \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n} \right|_S = \chi(x, y, z).$$

Потенциальные течения суть безвихревые течения, потому как

$$\vec{\omega} = \text{rot}\vec{v} = \text{rotgrad}\varphi \equiv 0,$$

следовательно, $\omega = 0$ и уравнение для функции тока тоже будет эллиптического типа

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

с краевым условием Дирихле на S :

$$\psi(x, y)|_S = \vartheta(x, y)$$

§4. Уравнения гидродинамического давления

В течениях несжимаемой жидкости комбинация уравнений динамики с уравнением неразрывности дает для давления уравнение эллиптического типа

$$\Delta p + (\nabla, (\vec{v}, \nabla)\vec{v}) - (\nabla, \rho\vec{F}) = 0$$

В плоских течениях при $\rho = const, \vec{F} = const$, оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

в пространственных течениях

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

§5. Уравнения потенциала электростатического поля

По теореме Гаусса для вектора напряженности \vec{E} электрического поля получается уравнение:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \rho,$$

где ε_0 - электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость среды (в вакууме $\varepsilon=1$), ρ - объемная плотность зарядов. Потенциал φ электрического поля связан с вектором напряженности формулой $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ или в декартовых проекциях

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Подстановка дает уравнение эллиптического типа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

что в декартовой системе имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

для которого могут иметь место краевые условия типа *фон*

Неймана $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_1} = \chi$ или *Дирихле* $\varphi|_{S_2} = \vartheta, S_1 \cup S_2 = S$.

Модуль-8
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§1. Метод простой итерации Якоби

В двумерной задаче

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f(x, y) = 0, \quad T \Big|_S = \varphi$$

уравнение аппроксимируется схемой

$$\left(\frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij} - T_{i-1j}}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1} - T_{ij}}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij} - T_{ij-1}}{h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yi}} + f_{ij} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, \quad T_{ij} \Big|_{S_h} = \varphi_{ij} \quad (1)$$

Метод *Якоби* используется так: задается произвольное начальное приближение $T_{ij}^0 = f_{ij}$, или $T_{ij}^0 = 0$, последующие приближения (итерации) вычисляются по алгоритму

$$\left(\frac{T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yi}} + f_{ij} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, T_{ij}^n \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}, n = 0, 1, 2, \dots, n^* \quad (2)$$

Из (2) находятся последующие приближения к решению

$$T_{ij}^{n+1} = \left[\frac{1}{h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{h_{yi}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{T_{i+1j}^n}{h_{xi+1}} + \frac{T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{T_{ij+1}^n}{h_{yj+1}} + \frac{T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yi}} + f_{ij} \right]$$

Вычисляются невязки n -итерации

$$R_{ij}^n = \left(\frac{T_{i+1j}^n - T_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yi}} + f_{ij}, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, n = 0, 1, 2, \dots, n^*, R_{ij}^n \Big|_{S_h} = 0$$

На точном решении $T_{ij}^*, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$ системы алгебраических уравнений (1) невязка равна нулю $R_{ij}^* = 0, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$. Следовательно, при сходимости итераций пределом невязок должен быть нуль $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{ij}^n = 0$. На основании этого критерием прекращения итерационного процесса является такой номер n^* , при котором выполняется неравенство

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |R_{ij}^{n^*}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \quad (4)$$

Это основной критерий сходимости итераций. Последнее $T_{ij}^{n^*}$ берется в качестве решения системы : $T_{ij} \approx T_{ij}^{n^*}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$. Метод Якоби – сходящийся метод. Установилось мнение, что вместо (4) надо пользоваться следующим критерием сходимости итераций

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |T_{ij}^{n^*+1} - T_{ij}^{n^*}| \leq \varepsilon^o, \quad \varepsilon^o \approx 0, \varepsilon^o \neq 0 \quad (5)$$

Проведем согласование этого критерия с основным критерием (4). С этой целью приведем (2) к форме

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T_{i+1j}^n - T_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yi}} + f_{ij} = \\ & = \left(\frac{1}{h_{xi} h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi} h_{xi}} + \frac{1}{h_{yi} h_{yi+1}} + \frac{1}{h_{yi} h_{yi}} \right) (T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n), \quad (6) \end{aligned}$$

Сравнивая с (3) находим, что невязку можно вычислять по следующей формуле

$$R_{ij}^n = \left(\frac{1}{h_{xi} h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi} h_{xi}} + \frac{1}{h_{yi} h_{yi+1}} + \frac{1}{h_{yi} h_{yi}} \right) (T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n) \quad (7)$$

Из (7) получается связь между критериями (4) и (5):

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_y - 1}} |R_{ij}^{n*}| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_y - 1}} \left[\left(\frac{1}{\bar{h}_{xi} h_{xi+1}} + \frac{1}{\bar{h}_{xi} h_{xi}} + \frac{1}{\bar{h}_{yi} h_{yi+1}} + \frac{1}{\bar{h}_{yi} h_{yi}} \right) | (T_{ij}^{n*+1} - T_{ij}^{n*}) | \right] \leq \varepsilon \quad (8)$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j$ из (8) вытекает связь между (4) и (5) в виде

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_y - 1}} |R_{ij}^{n*}| = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_y - 1}} | (T_{ij}^{n*+1} - T_{ij}^{n*}) | \leq \varepsilon,$$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_y - 1}} | (T_{ij}^{n*+1} - T_{ij}^{n*}) | \leq \varepsilon \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)},$$

поэтому при сходимости должно быть выполнено равенство

$$\varepsilon^o = \varepsilon \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)} \quad (9)$$

На квадратной сетке $h_x = h_y = h, \forall (i, j)$ особенно наглядно видно

$$\varepsilon^o = \varepsilon h^2 / 4 \quad \text{или} \quad \varepsilon = 4\varepsilon^o / h^2 \quad (10)$$

На кубической сетке в трехмерных задачах $\varepsilon^o = \varepsilon h^2 / 6$.

В схемах с граничным условием фон Неймана $(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma T) \Big|_S = \varphi$

(здесь n означает нормальное (перпендикулярное к границе) направление. В одномерной задаче $n = x$.) пусть краевое условие 2-го рода поставлено на левой границе $i = 0$. Тогда оно может быть аппроксимировано в виде

$$\left(\lambda \frac{T_{1j}^n - T_{0j}^n}{h_{x1}} + \gamma T_{0j}^n \right) \Big|_{S_h} = \varphi_{0j}, \quad j = 1, \dots, N_y - 1$$

На границе итерация вычисляется по формуле

$$T_{0j}^n = (\varphi_{0j} - \lambda \frac{T_{1j}^n}{h_{x1}}) / (\gamma - \frac{\lambda}{h_{x1}}), \quad j = 1, \dots, N_y - 1 \quad (11)$$

Невязка на границе равна

$$R_{0j}^n = \left(\lambda \frac{T_{1j}^n - T_{0j}^n}{h_{x1}} + \gamma T_{0j}^n \right) \Big|_{S_h} - \varphi_{0j}, \quad j = 1, \dots, N_y - 1$$

§2. Метод Либмана-Зейделя

В этом методе при определении T_{ij}^{n+1} сразу же используются уже вычисленные значения $T_{i-1j}^{n+1}, T_{ij-1}^{n+1}$ для конструкции:

$$\left(\frac{T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{yi}} + f_{ij} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, \quad T_{ij}^n \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}, \quad (12)$$

$$T_{ij}^0 = f_{ij}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Из (12) вычисляется последующее приближение к решению

$$T_{ij}^{n+1} = \left[\frac{1}{\bar{h}_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{\bar{h}_{yi}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{T_{i+1j}^n}{h_{xi+1}} + \frac{T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^n}{h_{yj+1}} + \frac{T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{yi}} + f_{ij} \right]$$

Можно по другому алгоритму, но используя $T_{ij+1}^{n+1}, T_{i+1j}^{n+1}$:

$$\left(\frac{T_{i+1j}^{n+1} - T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{xi}} + \left(\frac{T_{ij+1}^{n+1} - T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{\bar{h}_{yi}} + f_{ij} = 0, \quad (13)$$

$$i = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 1, j = N_y - 1, N_y - 2, \dots, 1, \quad T_{ij}^n \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}$$

Итерации прекращаются при выполнении критерия (4)

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |R_{ij}^{n^*}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j$ метод *Либмана-Зейделя* (12) упрощается:

$$T_{ij}^{n+1} = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)^{-2} \left(\frac{T_{i-1j}^{n+1} + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1}^{n+1} + T_{ij+1}^n}{h_y^2} + f_{ij} \right), \quad (14)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, \quad T_{ij}^n|_{S_h} = \varphi_{ij}, n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Пусть уравнение с конвективными членами

$$u(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + f(x, y), \quad (15)$$

$$\lambda = \lambda(x, y) > 0, \Phi|_S = \varphi(x, y)$$

аппроксимируется со «схемой вязкостью»

$$\begin{aligned} & \left[\frac{u+|u|}{2} \Phi_{\bar{x}} + \frac{u-|u|}{2} \Phi_x + \frac{v+|v|}{2} \Phi_{\bar{y}} + \frac{v-|v|}{2} \Phi_y \right] = \\ & = ([T_{+1}\lambda + \lambda]/2\Phi_x)_{\bar{x}} + ([T_{+2}\lambda + \lambda]/2\Phi_y)_{\bar{y}} + f, (x, y) \in \Omega_h \end{aligned} \quad (16)$$

Метод *Либмана-Зейделя* для (16) подобен (12):

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij} + |u_{ij}|}{2} \frac{(\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^{n+1})}{h_{xi}} + \frac{u_{ij} - |u_{ij}|}{2} \frac{(T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1})}{h_{xi+1}} + \\ & + \frac{v_{ij} + |v_{ij}|}{2} \frac{(\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^{n+1})}{h_{yj}} + \frac{v_{ij} - |v_{ij}|}{2} \frac{(T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1})}{h_{yj+1}} \Big] = \\ & = \left(\frac{[T_{+1}\lambda + \lambda](T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1})}{2h_{xi+1}} - \frac{[\lambda + T_{-1}\lambda](\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^{n+1})}{2h_{xi}} \right) \frac{1}{h_{xi}} + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{[T_{+2}\lambda + \lambda](T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1})}{2h_{yj+1}} - \frac{[\lambda + T_{-2}\lambda](\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^{n+1})}{2h_{yj}} \right) \frac{1}{h_{yj}} + f_{ij}^n, \quad (17)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, \quad \Phi_{ij}^n \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Для монотонной схемы «без схемной вязкости»

$$\begin{aligned} & \frac{u + |u|}{2} \Big|_{\Phi_{\bar{x}^0}} + \frac{u - |u|}{2} \Big|_{\Phi_{x^0}} + \frac{v + |v|}{2} \Big|_{\Phi_{\bar{y}^0}} + \frac{v - |v|}{2} \Big|_{\Phi_{y^0}} = \\ & = ([T_{+1}\lambda + \lambda]/2\Phi_x)_x + ([T_{+2}\lambda + \lambda]/2\Phi_y)_y + f, \quad (x, y) \in \Omega_h \end{aligned} \quad (18)$$

алгоритм *Либмана-Зейделя* используется аналогично.

§3. Сходимость итерационного процесса

Основные принципы доказательства сходимости итерационных алгоритмов приведем на примере метода простой итерации для системы разностных уравнений (16), записанной в операторах:

$$c_{+1}\Delta_{+1}\Phi - c_{-1}\Delta_{-1}\Phi + c_{+2}\Delta_{+2}\Phi - c_{-2}\Delta_{-2}\Phi + f = 0, \quad (x, y) \in \Omega_h, \quad (19)$$

$$\text{где } c_{+1} = \frac{\lambda_{i+1j} + \lambda_{ij}}{2h_{xi+1}h_{xi}} + \frac{|u_{ij}| - u_{ij}}{2h_{xi+1}}, \quad c_{-1} = \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{i-1j}}{2h_{xi}h_{xi}} + \frac{|u_{ij}| + u_{ij}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2} = \frac{\lambda_{ij+1} + \lambda_{ij}}{2h_{yj+1}h_{yj}} + \frac{|v_{ij}| - v_{ij}}{2h_{yj+1}}, \quad c_{-2} = \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ij-1}}{2h_{yj}h_{yj}} + \frac{|v_{ij}| + v_{ij}}{2h_{yj}} \quad (20)$$

Метод *Якоби* для (19) имеет вид

$$\begin{aligned} & c_{+1}(T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-1}(\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^n) + c_{+2}(T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - \\ & - c_{-2}(\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^n) + f = 0, \quad (x, y) \in \Omega_h, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Phi_{ij}^n \Big|_{S_h} = \Phi_{ij}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}, \quad \Phi_{ij}^0 = f_{ij}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Вводится сеточная функция *погрешности итераций*

$$\hat{\Phi}^n = \Phi^n - \Phi, \quad \hat{\Phi}_{ij}^n = \Phi_{ij}^n - \Phi_{ij}, \quad \hat{\Phi}_{ij}^n \Big|_{S_h} = \hat{\Phi}_{ij}^{n+1} \Big|_{S_h} = 0, \quad \forall n$$

Подставляя $\Phi^n = \hat{\Phi}^n + \Phi$ в (21), найдем

$$c_{+1}(T_{+1}\hat{\Phi}^n - \hat{\Phi}^{n+1}) - c_{-1}(\hat{\Phi}^{n+1} - T_{-1}\hat{\Phi}^n) +$$

$$+ c_{+2}(T_{+2}\hat{\Phi}^n - \hat{\Phi}^{n+1}) - c_{-2}(\hat{\Phi}^{n+1} - T_{-2}\hat{\Phi}^n) = 0, (x, y) \in \Omega_h,$$

$$\hat{\Phi}_{ij}^n \Big|_{S_h} = \hat{\Phi}_{ij}^{n+1} \Big|_{S_h} = 0, \Phi_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}, n = 0, 1, 2, \dots, n^* \quad (22)$$

Из (22) вытекает

$$(c_{+1} + c_{-1} + c_{+2} + c_{-2})\hat{\Phi}^{n+1} = c_{+1}T_{+1}\hat{\Phi}^n + c_{-1}T_{-1}\hat{\Phi}^n + c_{+2}T_{+2}\hat{\Phi}^n + c_{-2}T_{-2}\hat{\Phi}^n, (x, y) \in \Omega_h$$

Беря по модулю от обеих частей этого выражения и имея в виду положительность коэффициентов $c_{\pm m} > 0, m = 1, 2$, выводим неравенства

$$(c_{+1} + c_{-1} + c_{+2} + c_{-2}) \|\hat{\Phi}^{n+1}\| = \|c_{+1}T_{+1}\hat{\Phi}^n + c_{-1}T_{-1}\hat{\Phi}^n + c_{+2}T_{+2}\hat{\Phi}^n + c_{-2}T_{-2}\hat{\Phi}^n\| \leq c_{+1} \|T_{+1}\hat{\Phi}^n\| + c_{-1} \|T_{-1}\hat{\Phi}^n\| + c_{+2} \|T_{+2}\hat{\Phi}^n\| + c_{-2} \|T_{-2}\hat{\Phi}^n\| \leq c_{+1} \|\hat{\Phi}^n\| + c_{-1} \|\hat{\Phi}^n\| + c_{+2} \|\hat{\Phi}^n\| + c_{-2} \|\hat{\Phi}^n\| = (c_{+1} + c_{-1} + c_{+2} + c_{-2}) \|\hat{\Phi}^n\|, (x, y) \in \Omega_h, \forall n,$$

откуда получается

$$(c_{+1} + c_{-1} + c_{+2} + c_{-2}) \|\hat{\Phi}^{n+1}\| \leq (c_{+1} + c_{-1} + c_{+2} + c_{-2}) \|\hat{\Phi}^n\|, (x, y) \in \Omega_h, \forall n$$

Сокращая множители и имея в виду, что данное неравенство имеет место и для максимума модуля $\max_{\Omega_h} |\hat{\Phi}^{n+1}| \leq \|\hat{\Phi}^{n+1}\|$,

$$\|\hat{\Phi}^{n+1}\| \leq \|\hat{\Phi}^n\|, n = 0, 1, 2, \dots,$$

получаем монотонно невозрастающую последовательность

$$\|\hat{\Phi}^{n+1}\| \leq \|\hat{\Phi}^n\| \leq \|\hat{\Phi}^{n-1}\| \leq \|\hat{\Phi}^{n-2}\| \leq \dots \leq \|\hat{\Phi}^1\| \leq \|\hat{\Phi}^0\|, n = 0, 1, 2, \dots$$

пределом которой будет $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\Phi}^n\| = 0$. В результате пришли к

следующему результату $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\Phi}^n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n - \Phi\| = 0$, откуда

вытекает выполнение в пределе равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n = \Phi$.

Сходимость метода простой итерации доказана. Аналогичным образом доказывается сходимость метода *Либмана-Зейделя*

$$c_{+1}(T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-1}(\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^{n+1}) + c_{+2}(T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-2}(\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^{n+1}) + f = 0, (x, y) \in \Omega_h, \quad (23)$$

$$\left| \Phi_{ij}^n \right|_{S_h} = \left| \Phi_{ij}^{n+1} \right|_{S_h} = \varphi_{ij}, \quad \Phi_{ij}^0 = f_{ij}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

§4. Итерационный метод *Письмана-Ракфорда*

В своем итерационном алгоритме *Письман* и *Ракфорд* в 1955г.

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\theta} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n + f,$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\theta} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^{n+1} + f, T^0 = f, n = 0, 1, \dots, n^*$$

поставили граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h} = \varphi, \quad T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi,$$

совпадающие с теорией *Дьяконова-Кряквиной*.

Здесь $0 < \theta < 1$ – итерационный параметр, оптимальный выбор которого обсуждается в /9/, /14/, операторы

$$A_1 = \frac{a^2}{\hbar_{xi}} \left(\frac{\Delta_{+1}}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}}{h_{xi}} \right), \quad A_2 = \frac{a^2}{\hbar_{yj}} \left(\frac{\Delta_{+2}}{h_{yj+1}} - \frac{\Delta_{-2}}{h_{yj}} \right),$$

на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y$ имеет вид

$$A_1 = \frac{a^2}{h_x^2} (T_{+1} - 2E + T_{-1}) = \frac{a^2}{h_x^2} (\Delta_{+1} - \Delta_{-1}),$$

$$A_2 = \frac{a^2}{h_y^2} (T_{+2} - 2E + T_{-2}) = \frac{a^2}{h_y^2} (\Delta_{+2} - \Delta_{-2})$$

Трехточечными прогонками по x вычисляются $T^{n+\frac{1}{2}}$ с гранич-

ным условием $T^{n+\frac{1}{2}} = \varphi$, трехточечными прогонками по y находятся T^{n+1} при $T^{n+1}|_{S_h} = \varphi$. При использовании коэффициентов $c_{\pm m} > 0, m = 1, 2$ операторы в методе *Письмана-Ракфорда* будут такие

$$A_m = c_{+m}\Delta_{+m} - c_{-m}\Delta_{-m}, m = 1, 2$$

Для стационарной монотонной схемы «без схемной вязкости»

$$\begin{aligned} & \frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0} + \frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0} + \frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0} + \frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0} = \\ & = ([T_{+1}\lambda + \lambda]/2\Phi_{x^0})_{\bar{x}} + ([T_{+2}\lambda + \lambda]/2\Phi_{y^0})_{\bar{y}} + f, (x, y) \in \Omega_h \end{aligned} \quad (24)$$

идея метода *Письмана-Ракфорда* используется аналогично:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^{n+\frac{1}{2}} - \Phi^n}{\theta} + \frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}^n + \frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}^n = \\ & = ([T_{+1}\lambda + \lambda]/2\Phi_x^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}} + ([T_{+2}\lambda + \lambda]/2\Phi_y^n)_{\bar{y}} + f, (x, y) \in \Omega_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n+\frac{1}{2}}}{\theta} + \frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}^{n+1} + \frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}^{n+1} = \\ & = ([T_{+1}\lambda + \lambda]/2\Phi_x^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}} + ([T_{+2}\lambda + \lambda]/2\Phi_y^{n+1})_{\bar{y}} + f, (x, y) \in \Omega_h \end{aligned}$$

Пятиточечными прогонками по x вычисляются $\Phi^{n+\frac{1}{2}}$ с граничным условием $\Phi^{n+\frac{1}{2}} = \varphi$, пятиточечными прогонками по y находится Φ^{n+1} при $\Phi^{n+1}|_{S_h} = \varphi$. Сходящийся метод.

§5. Итерационный метод Дугласа-Ракфорда

В итерационном алгоритме *Дугласа-Ракфорда*, которая была названа *Н.Н.Яненко* методом стабилизирующей поправки,

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\theta} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n + f,$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\theta} = A_2 (T^{n+1} - T^n), T^0 = f, n = 0, 1, \dots, n^*$$

Дуглас и *Ракфорд* изначально поставили граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h} = \varphi, \quad T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi, \quad \text{которые подтверждаются теорией}$$

Дьяконова. Здесь также $0 < \theta < 1$ – итерационный параметр, выбираемый зачастую экспериментально из соображений уменьшения числа итераций n^* . Метод *Дугласа-Ракфорда* является сходящимся методом [12].

Для решения трехмерных задач схема *Дугласа-Ракфорда* имеет конструкцию

$$\frac{T^{n+\frac{1}{3}} - T^n}{\theta} = A_1 T^{n+\frac{1}{3}} + A_2 T^n + A_3 T^n + f,$$

$$\frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^{n+\frac{1}{3}}}{\theta} = A_2 (T^{n+\frac{2}{3}} - T^n),$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{2}{3}}}{\theta} = A_3 (T^{n+1} - T^n), T^0 = f, T^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi$$

По методу *Дьяконова* ставятся граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = \varphi + (E - \tau A_2)(E - \tau A_3)(\varphi - \varphi) = \varphi,$$

$$T^{n+\frac{2}{3}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} y=0 \\ y=a_2 \end{smallmatrix} \right)} = \varphi + (E - \tau A_3)(\varphi - \varphi) = \varphi,$$

Такие же граничные условия для промежуточных величин были поставлены *Дугласом и Ракфордом* в 1956г. до появления теоретических предпосылок *Дьяконова*. Итерации сходятся /12/.

§6. Метод верхней релаксации

Метод состоит из двух этапов. Первый этап совпадает с методом *Либмана-Зейделя*:

$$T_{ijk}^* = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_z^2} \right)^{-1} \left(\frac{T_{i-1,jk}^{n+1} + T_{i+1,jk}^n}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1k}^{n+1} + T_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \frac{T_{ijk-1}^{n+1} + T_{ijk+1}^n}{h_z^2} + f_{ijk} \right), i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (26)$$

$$T_{ijk}^n \Big|_{S_h} = T_{ijk}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}, T_{ijk}^0 = f_{ijk},$$

второй этап такой:

$$T_{ijk}^{n+1} = (1 - \theta) T_{ijk}^n + \theta T_{ijk}^*, \quad (27)$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}, T_{ijk}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}, n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Здесь θ - параметр итерации, $0 < \theta < 1$ - нижняя релаксация, $1 < \theta < 2$ - верхняя релаксация. Подставляя (26) в (27), имеем итерационный алгоритм

$$T_{ijk}^{n+1} = (1 - \theta) T_{ijk}^n + \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_z^2} \right)^{-1} \left(\frac{T_{i-1,jk}^{n+1} + T_{i+1,jk}^n}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1k}^{n+1} + T_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \frac{T_{ijk-1}^{n+1} + T_{ijk+1}^n}{h_z^2} + f_{ijk} \right), i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (28)$$

При $\theta = 1$ очевидно (28) переходит в метод *Либмана-Зейделя*. Параметр θ выбирается из интервала $1 < \theta < 2$, соответственно этому название - верхняя релаксация.

§7. Параметрический итерационный процесс

Для примера рассмотрим трехмерное уравнение

$$\begin{aligned} & \rho[u(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}) + f(x, y, z), \\ & \mu = \mu(x, y, z) > 0, \Phi|_S = \varphi(x, y, z), \end{aligned} \quad (29)$$

которое аппроксимируется монотонной схемой *Джакупова*

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{u+|u|}{2} \Phi_{\bar{x}} + \frac{u-|u|}{2} \Phi_x + \frac{v+|v|}{2} \Phi_{\bar{y}} + \frac{v-|v|}{2} \Phi_y + \right. \\ & \left. + \frac{w+|w|}{2} \Phi_{\bar{z}} + \frac{w-|w|}{2} \Phi_z \right] = ([T_{+1} \mu + \mu] / 2 \Phi_x)_{\bar{x}} + (\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) \Phi_{x\bar{x}} + \\ & + ([T_{+2} \mu + \mu] / 2 \Phi_y)_{\bar{y}} + (\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) \Phi_{y\bar{y}} + ([T_{+3} \mu + \mu] / 2 \Phi_z)_{\bar{z}} + \\ & + (\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) \Phi_{z\bar{z}} + f, (x, y, z) \in \Omega_h \end{aligned} \quad (30)$$

Приведем (30) к следующей операторной форме

$$\begin{aligned} & c_{+1} \Delta_{+1} \Phi - c_{-1} \Delta_{-1} \Phi + c_{+2} \Delta_{+2} \Phi - c_{-2} \Delta_{-2} \Phi + \\ & + c_{+3} \Delta_{+3} \Phi - c_{-3} \Delta_{-3} \Phi + f = 0, (x, y, z) \in \Omega_h, \Phi|_S = \varphi, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} c_{+1}^{n+1} &= \frac{(\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) + (\mu_{i+1jk}^{n+1} + \mu_{ijk}^{n+1}) / 2}{h_{xi+1} \tilde{h}_{xi}} + \rho \frac{|u_{ijk}^{n+1}| - u_{ijk}^{n+1}}{2h_{xi+1}}, \\ c_{-1}^{n+1} &= \frac{(\mu_x^{vw} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^{n+1} + \mu_{i-1jk}^{n+1}) / 2}{h_{xi} \tilde{h}_{xi}} + \rho \frac{|u_{ijk}^{n+1}| + u_{ijk}^{n+1}}{2h_{xi}}, \\ c_{+2}^{n+1} &= \frac{(\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) + (\mu_{ij+1k}^{n+1} + \mu_{ijk}^{n+1}) / 2}{h_{yj+1} \tilde{h}_{yj}} + \rho \frac{|v_{ijk}^{n+1}| - v_{ijk}^{n+1}}{2h_{yj+1}}, \\ c_{-2}^{n+1} &= \frac{(\mu_y^{wu} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^{n+1} + \mu_{ij-1k}^{n+1}) / 2}{h_{yj} \tilde{h}_{yj}} + \rho \frac{|v_{ijk}^{n+1}| + v_{ijk}^{n+1}}{2h_{yj}}, \end{aligned}$$

$$c_{+3}^{n+1} = \frac{(\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk+1}^{n+1} + \mu_{ijk}^{n+1})/2}{h_{zk+1} \hbar_{zk}} + \rho \frac{|w_{ijk}^{n+1}| - w_{ijk}^{n+1}}{2h_{zk+1}},$$

$$c_{-3}^{n+1} = \frac{(\mu_z^{uv} - \mu_{\min}) + (\mu_{ijk}^{n+1} + \mu_{ijk-1}^{n+1})/2}{h_{zk} \hbar_{zk}} + \rho \frac{|w_{ijk}^{n+1}| + w_{ijk}^{n+1}}{2h_{zk}}$$

В 1-ом варианте при краевом условии *Дирихле* для решения (31) параметрический итерационный процесс применяется по аналогу с методом *Либмана-Зейделя*:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\theta} = c_{+1}(T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-1}(\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^{n+1}) +$$

$$+ c_{+2}(T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-2}(\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^{n+1}) + c_{+3}(T_{+3}\Phi^n - \Phi^{n+1}) -$$

$$- c_{-3}(\Phi^{n+1} - T_{-3}\Phi^{n+1}) + f, i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1,$$

$$\Phi_{ij}^n \Big|_{S_h} = \Phi_{ij}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ij}, \quad \Phi_{ij}^0 = f_{ij}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*.$$

Во 2-ом варианте, если имеет место краевое условие типа *фон Неймана*, параметрический итерационный процесс применяется по аналогу с методом *Якоби*:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\theta} = c_{+1}(T_{+1}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-1}(\Phi^{n+1} - T_{-1}\Phi^n) + c_{+2}(T_{+2}\Phi^n - \Phi^{n+1}) -$$

$$- c_{-2}(\Phi^{n+1} - T_{-2}\Phi^n) + c_{+3}(T_{+3}\Phi^n - \Phi^{n+1}) - c_{-3}(\Phi^{n+1} - T_{-3}\Phi^n) + f,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1,$$

$$\Phi_{ijk}^n \Big|_{S_h} = \Phi_{ijk}^{n+1} \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk}, \quad \Phi_{ijk}^0 = f_{ijk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n^*,$$

$0 < \theta < 1$ – итерационный параметр, подбирается экспериментально с целью уменьшения числа итераций n^* . Данный алгоритм является сходящимся итерационным процессом.

Для схемы без «аппроксимационной вязкости»

$$\frac{u+|u|}{2} \Phi_{\bar{x}^0} + \frac{u-|u|}{2} \Phi_{x^0} + \frac{v+|v|}{2} \Phi_{\bar{y}^0} + \frac{v-|v|}{2} \Phi_{y^0} \Big] +$$

$$+ \frac{w^+ |w|}{2} \Phi_{z^0} + \frac{w^- |w|}{2} \Phi_{z^0}] = ([T_{+1} \lambda + \lambda] / 2 \Phi_x)_{\dot{x}} +$$

$$+ ([T_{+2} \lambda + \lambda] / 2 \Phi_y)_{\dot{y}} + ([T_{+3} \lambda + \lambda] / 2 \Phi_z)_{\dot{z}} + f, (x, y, z) \in \Omega_h$$

параметрический процесс применяется аналогично.

Для трехмерного уравнения теплопроводности параметрический итерационный процесс выглядит так:

$$\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^n}{\theta} = \left(\frac{T_{i+1,jk}^n - T_{ijk}^{n+1}}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{i-1,jk}^n}{h_{xi}} \right) \frac{1}{\hbar_{xi}} +$$

$$+ \left(\frac{T_{ij+1,k}^n - T_{ijk}^{n+1}}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ij-1,k}^n}{h_{yj}} \right) \frac{1}{\hbar_{yi}} + \left(\frac{T_{ijk+1}^n - T_{ijk}^{n+1}}{h_{zk+1}} - \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk-1}^n}{h_{zk}} \right) \frac{1}{\hbar_{zk}} + f_{ijk},$$

$$T_{ijk}^0 = f_{ijk}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1, T_{ijk}^n \Big|_{S_h} = \varphi_{ijk},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n^*$$

Для краевых условий типа фон Неймана, например, на гранях

$$\text{параллелепипеда } x = 0, \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1 \text{ и } x = a_1, \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a_1} = \psi_2,$$

итерации находятся по алгоритмам

$$\frac{-3T_{0jk}^{n+1} + 4T_{1jk}^n - T_{2jk}^n}{2h_{x1}} = \psi_{10jk}, \frac{3T_{N_x,jk}^{n+1} - 4T_{N_x-1,jk}^n + T_{N_x-2,jk}^n}{2h_{xN_x}} = \psi_{10jk},$$

$$j = 1, \dots, N_y - 1, k = 1, \dots, N_z - 1$$

Здесь формулы написаны для равных приграничных шагов

$$h_{x1} = h_{x2}, h_{xN_x} = h_{xN_x-1}.$$

Вопросы.

1. Написать для системы (18) метод Либмана-Зейделя.
2. Написать параметрический метод в индексном виде.
3. Доказать сходимость параметрического итерационного процесса.

4. Применить метод верхней релаксации для трехмерного уравнения.
5. Написать аппроксимации краевых условий фон Неймана на неравномерной сетке.

Модуль-9 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§1. Уравнения возмущений плотности, скорости и давления в одномерных течениях идеального газа

Пусть идеальный газ до момента времени $t < t_0$ находится в состоянии покоя с параметрами $u = u_0 = 0$, $\rho = \rho_0 = const$, $p = p_0 = const$. В момент времени $t = t_0$ в газ вносятся малые возмущения скорости, плотности и давления, соответственно, $u(x, t_0) = u_0 + u'(x, t_0)$, $\rho(x, t_0) = \rho_0 + \rho'(x, t_0)$, $p(x, t_0) = p_0 + p'(x, t_0)$. В силу их малости $|u'(x, t_0)| \approx 0$, $|\rho'(x, t_0)| \approx 0$, $|p'(x, t_0)| \approx 0$ получаются уравнения гиперболического типа для возмущений плотности ρ' , скорости u' и давления $p'/2$:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2},$$

здесь $a_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0}$ - скорость звука.

§2. Уравнения акустики

Одномерные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad p = R\rho T, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$c_v \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x} \right) = -p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad T|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho^0.$$

в лагранжевых массовых переменных $s = \int_{x_0}^x \rho(x, t) dx$, $x_0 = const$

$t_s = t$, записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t_s} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_s} \left(c_v T + \frac{u^2}{2} \right) = - \frac{\partial (p u)}{\partial s}, \quad p = R \rho T,$$

Благодаря скорости звука $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)$ имеет место

$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s}$. В результате уравнения динамики получают форму

$$\frac{\partial u}{\partial t_s} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t_s} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

Исключением из данной системы скорости u , получается уравнение гиперболического типа для плотности

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t_s^2} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + \frac{\partial \ln \rho^2}{\partial t_s} \frac{\partial \rho}{\partial t_s},$$

Исключением из системы плотности ρ , получается гиперболическое уравнение для скорости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_s^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial \ln a^2}{\partial t_s} \frac{\partial u}{\partial t_s}$$

§3. Уравнения теории упругости. Уравнение Ламе с симметричным тензором напряжений

($\mu^o = \mu$) и уравнение Джакупова ($\mu^o = 0$)

с несимметричным тензором напряжений

В теории упругости из 2-го закона Ньютона (или из теоремы об изменении импульса) в изотропном теле для перемещений выводится гиперболическое уравнение Ламе, основанное на ошибочном предположении о симметричности тензора напряжений /1/:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w}$$

Доказана (см. Джакупов К.Б. /17/) несимметричность тензора напряжений в сплошной среде, чему соответствует уравнение гиперболического типа

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda \text{grad div} \vec{w} + \mu \Delta \vec{w}$$

Здесь $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ - перемещение, $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ - массовая сила, поэтому в проекциях на оси координат получается система из 3-х скалярных гиперболических уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} = \rho_0 F_z + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right)$$

В уравнениях Ламе $\mu^o = \mu$, в уравнениях Джакупова $\mu^o = 0$.

§4. Уравнения электродинамики

Из системы уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{div} \vec{D} = \rho, \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{div} \vec{B} = 0,$$

$$\vec{j} = \delta \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

выводятся уравнения гиперболического типа. Например, для напряженности \vec{E} электрического поля получается уравнение

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{grad div} \vec{E}$$

Модуль-10
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ

§1. Явная схема. Критерий Куранта

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, a^2 = const, \quad (1)$$

$$\Phi|_{t=t_0} = d_0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=t_0} = d(x), \quad \Phi|_{x=0} = \varphi(0, t), \quad \Phi|_{x=a_1} = \varphi(a_1, t)$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ явная схема имеет индексный вид

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - 2\Phi_i^n + \Phi_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{h_x^2} \right), n=1, \dots, N_\tau - 1, \quad (2)$$

$$\Phi_i^0 = d_{0i}, \Phi_i^1 = \Phi_i^0 + \tau d_i + \tau^2 / 2 \left(a^2 \frac{d^2 d_0}{dx^2} \right)_i, i=1, \dots, N_x - 1$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2), \quad i=1, \dots, N_x - 1$$

Проведем исследование устойчивости методом фон Неймана

$$\Phi_i^n = p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x}, \quad \bar{i} = \sqrt{-1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), имея в виду, что в выражении $p^{(n)}$ стоит коэффициент p , а (n) - показатель степени:

$$\begin{aligned} & \frac{p^{(n+1)} e^{\bar{i} m i h_x} - 2p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x} + p^{(n-1)} e^{\bar{i} m i h_x}}{\tau^2} = \\ & = a^2 \left(\frac{p^{(n)} e^{\bar{i} m (i+1) h_x} - 2p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x} + p^{(n)} e^{\bar{i} m (i-1) h_x}}{h_x^2} \right) \end{aligned}$$

После очевидных сокращений вытекает на $p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x}$ вытекает

$$\frac{p-2+p^{-1}}{\tau^2} = a^2 \left(\frac{e^{imh_x} - 2 + e^{-imh_x}}{h_x^2} \right), \quad (4)$$

По свойству комплексных чисел

$$e^{imh_x} = \cos mh_x + i \sin mh_x, \quad e^{-imh_x} = \cos mh_x - i \sin mh_x,$$

в силу которых в (4) исключаются мнимые числа

$$\frac{p-2+p^{-1}}{\tau^2} = a^2 \left(\frac{2 \cos mh_x - 2}{h_x^2} \right), \quad (5)$$

Тригонометрическая формула половинного аргумента

$$\sin \frac{mh_x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos mh_x}{2}}$$

использованное в (5), дает дисперсионное соотношение

$$\frac{p-2+p^{-1}}{\tau^2} = -\frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2}, \quad p^2 + (\tau^2 \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} - 2)p + 1 = 0$$

По теореме *Виетта* корни данного уравнения равны

$$p_{1,2} = -(\tau^2 \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} - 2)/2 \pm \sqrt{[(\tau^2 \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} - 2)/2]^2 - 1}$$

По методу *фон Неймана* для того чтобы числовые погрешности бесконечно не возрастали (иначе они могут испортить решение) необходимо выполнение неравенства

$$|p| \leq 1 \quad (6)$$

Если дискриминант уравнения положителен, то $|p| > 1$, следовательно, схема будет неустойчивой. Поэтому дискриминант должен быть неположительным

$$|(\tau^2 \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} - 2)/2| \leq 1,$$

тогда неравенство (6) будет выполнено для модуля комплексного числа. Из данного неравенства вытекает

$$\tau^2 \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} \leq 4, \quad \tau^2 \frac{a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2} \leq 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Максимальное значение синуса равно 1: $\max_m \sin^2 \frac{mh_x}{2} = 1$.

По этой причине из (7) получается условие устойчивости явной схемы (2) по методу фон Неймана в виде неравенства $\tau^2 \frac{a^2}{h_x^2} \leq 1$.

Выражение $Cu = \tau \frac{a}{h_x}$ – называется критерием Куранта. Для устойчивости явной схемы критерий Куранта не должен превосходить единицы.

Для двумерной начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), a^2 = const,$$

$$\Phi \Big|_{t=t_0} = d_0(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = d(x, y), \quad \Phi \Big|_S = \varphi(x, y, t)$$

явная схема

$$\frac{\Phi_{ij}^{n+1} - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1j}^n - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{i-1j}^n}{h_x^2} + \frac{\Phi_{ij+1}^n - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{ij-1}^n}{h_y^2} \right), i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, n = 1, \dots, N_\tau - 1,$$

$$\Phi_{ij}^0 = d_{0ij}, \Phi_{ij}^1 = \Phi_{ij}^0 + \tau d_{ij} + \tau^2 / 2 a^2 \left(\frac{\partial^2 d_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_0}{\partial y^2} \right)_{ij},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, \quad \Phi_{ij}^n \Big|_{S_h} = \varphi^n, \forall n$$

аппроксимирует с погрешностью $\psi_{ij}^n = O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2)$,

и счет по явной схеме устойчив при выполнении условия

$$\tau^2 a^2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \leq 1$$

§2. Неявная схема

Неявная схема имеет вид

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - 2\Phi_i^n + \Phi_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\Phi_{i+1}^{n+1} - 2\Phi_i^{n+1} + \Phi_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{\Phi_{i+1}^{n-1} - 2\Phi_i^{n-1} + \Phi_{i-1}^{n-1}}{h_x^2} \right), i=1, \dots, N_x - 1, n=1, \dots, N_\tau - 1,$$

$$\Phi_i^0 = d_{0i}, \Phi_i^1 = \Phi_i^0 + \tau d_i + \tau^2 / 2 (a^2 \frac{d^2 d_0}{dx^2})_i, i=1, \dots, N_x - 1,$$

абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации

$$\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2), i=1, \dots, N_x - 1$$

§3. Полуявные схемы уравнений теории упругости

Для численного решения введением дополнительной функции p уравнение теории упругости преобразуется к виду

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu^o) \text{grad} p + \mu \Delta \vec{w}, \text{div} \vec{w} = p,$$

Данная система подобна системе уравнений динамики вязкой жидкости, теория численных методов решения которых подробно изложена Джакуповым К.Б. в [3/, /9/, /17/. Идея явной схемы уравнений теории упругости излагается в двумерной задаче.

Схема 1

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right), \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = p,$$

$$w_x \Big|_{t=t_0} = d_0(x, y), \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = d(x, y), w_x \Big|_S = \varphi(x, y, t),$$

$$w_y \Big|_{t=t_0} = \hat{d}_0(x, y), \quad \frac{\partial w_y}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \hat{d}(x, y), w_y \Big|_S = \hat{\varphi}(x, y, t)$$

С целью экономичной записи схемы делаются переобозначения $w_x \equiv u, w_y \equiv v$. Схема имеет вид:

$$\rho_0 \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right], (1)$$

$$\rho_0 \frac{v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n + v_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = \rho_0 F_y + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{\hbar_{xi}} \left(\frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{\hbar_{yj}} \left(\frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right], (2)$$

$$i = \overline{1, \dots, N_x - 1}, j = \overline{1, \dots, N_y - 1};$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{ij}^{n+1}, i = \overline{1, \dots, N_x}, j = \overline{1, \dots, N_y}; (3)$$

$$n = \overline{1, N_\tau}$$

Задаются начальные условия на сетке

$$\Omega_h = \{x_i, i = \overline{1, \dots, N_x - 1}; y_j, j = \overline{1, \dots, N_y - 1}\} :$$

$$u_{ij}^0 = d_{0ij}, v_{ij}^0 = \hat{d}_{0ij}, u_{ij}^1 = d_{0ij} + \tau d_{ij}, v_{ij}^1 = \hat{d}_{0ij} + \tau \hat{d}_{ij},$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}$$

и краевые условия 1 рода в граничных узлах

$$S_h = \{i = 0, i = N_x, j = \overline{0, N_y}; j = 0, j = N_y, i = \overline{0, N_x}\}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h :$$

$$x = 0, u_{0j}^{n+1} = \varphi_{0j}^{n+1}, v_{0j}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0j}^{n+1}, j = \overline{0, N_y},$$

$$x = a_1, u_{N_x j}^{n+1} = \varphi_{N_x j}^{n+1}, v_{N_x j}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x j}^{n+1}, j = \overline{0, N_y},$$

$$y = 0, u_{i0}^{n+1} = \varphi_{i0}^{n+1}, v_{i0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0}^{n+1}, i = \overline{0, N_x},$$

$$y = a_2, u_{iN_y}^{n+1} = \varphi_{iN_y}^{n+1}, v_{iN_y}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1}, i = \overline{0, N_x}$$

Погрешности аппроксимаций равны

$$\psi_{uij}^n = O(\tau^2) + O(\hbar_{xi}^2) + O(h_{xi+1} - h_{xi}) + O(\hbar_{yj}^2) + O(h_{yj+1} - h_{yj}),$$

$$\psi_{vij}^n = O(\tau^2) + O(\hbar_{xi}^2) + O(h_{xi+1} - h_{xi}) + O(\hbar_{yj}^2) + O(h_{yj+1} - h_{yj}),$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\psi_{pij}^n = O(h_{xi}) + O(h_{yj}), \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$$

Условием устойчивости явной схемы является критерий Куранта

$$\tau^2 \mu \left[\frac{2}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{xi}} \right) + \frac{2}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1}{h_{yj}} \right) \right] \leq 1,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$$

На равномерной сетке схема (1), (2), (3) выглядит короче:

$$\rho_0 \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_x} +$$

$$+ \mu \left(\frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h_y^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n + v_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = \rho_0 F_y + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_y} +$$

$$+ \mu \left(\frac{v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^n + v_{i-1j}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1}^n - 2v_{ij}^n + v_{ij-1}^n}{h_y^2} \right),$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_x} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_y} = p_{ij}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y; \quad n = \overline{1, N_\tau}$$

Алгоритм реализации схемы 1

[I]. Ради краткости в (1) и (2) обозначаются

$$Q_{uij} = \mu \left[\frac{1}{h_{xi}} \left(\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{h_{yj}} \left(\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right] + \rho_0 F_x,$$

$$Q_{vij}^n = \mu \left[\frac{1}{h_{xi}} \left(\frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{1}{h_{yj}} \left(\frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right] + \rho_0 F_y,$$

на основании этих выражений (1) и (2) примут вид

$$\rho_0 \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uij}^n + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n + v_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vij}^n + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}, \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

Умножим обе части (4) и (5) на множитель τ^2 / ρ_0 :

$$u_{ij}^{n+1} = 2u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} \left[Q_{uij}^n + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} \right], \quad (6)$$

$$v_{ij}^{n+1} = 2v_{ij}^n - v_{ij}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} \left[Q_{vij}^n + (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \right] \quad (7)$$

Положим в (6) и (7)

$$F_{uij}^n = 2u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} Q_{uij}^n, F_{vij}^n = 2v_{ij}^n - v_{ij}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} Q_{vij}^n$$

Получаются выражения

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, \quad (8)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \quad (9)$$

Поле $p^{n+1} = \{p_{ij}^{n+1}, i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y\}$ вычисляется из (3). С этой целью (8) и (9) подставляются в (3). В результате для p_{ij}^{n+1} получается замкнутая система разностных уравнений, где число неизвестных равно числу уравнений. Конструирование уравнений состоит из нескольких этапов.

1° . Подстановка (8) и (9) в (3) во внутренних узлах с номерами $2 \leq i \leq N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{xi}} \left\{ [F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}] - [F_{ui-1j}^n + \right. \\ & \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}] \right\} + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ [F_{vij}^n + \right. \\ & \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}] - \right. \\ & \left. - [F_{vij-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}] \right\} = p_{ij}^{n+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$2 \leq i \leq N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 1$$

2° . Подстановка (8) и (9) в (3) во внутренних узлах с номерами $i = 1, 2 \leq j \leq N_y - 1$. В этих узлах уравнение (3) имеет вид

$$\frac{u_{1j}^{n+1} - u_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \frac{v_{1j}^{n+1} - v_{1j-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{1j}^{n+1}, \quad 2 \leq j \leq N_y - 1, \quad (11)$$

где $u_{0j}^{n+1} = \varphi_{0j}^{n+1}$. Подставляя сюда (8) и (9), найдем:

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ [F_{u1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{2j}^{n+1} - p_{1j}^{n+1}}{h_{x2}}] - \varphi_{0j}^{n+1} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ [F_{v1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{1j+1}^{n+1} - p_{1j}^{n+1}}{h_{yj+1}}] - \right. \\
& \left. - [F_{v1j-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{1j}^{n+1} - p_{1j-1}^{n+1}}{h_{yj}}] \right\} = p_{1j}^{n+1}, 2 \leq j \leq N_y - 1 \quad (12)
\end{aligned}$$

3°. Подстановка (8) и (9) в (3) во внутренних узлах с номерами $j=1; 2 \leq i \leq N_x - 1$, в которых (3) имеет вид

$$\frac{u_{i1}^{n+1} - u_{i-11}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{i1}^{n+1} - v_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} = p_{i1}^{n+1}, \quad 2 \leq i \leq N_x - 1, \quad (13)$$

где $v_{i0}^{n+1} = \hat{\phi}_{i0}^{n+1}$. Получается

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{xi}} \left\{ [F_{ui1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+11}^{n+1} - p_{i1}^{n+1}}{h_{xi+1}}] - \right. \\
& \left. - [F_{ui-11}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i1}^{n+1} - p_{i-11}^{n+1}}{h_{xi}}] \right\} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ [F_{v1}^n + \right. \\
& \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i2}^{n+1} - p_{i1}^{n+1}}{h_{y2}}] - \hat{\phi}_{i0}^{n+1} \right\} = p_{i1}^{n+1}, 2 \leq i \leq N_x - 1 \quad (14)
\end{aligned}$$

4°. Подстановка (8) и (9) в (3) во внутреннем узле с номером $i=1; j=1$; в этом узле (3)

$$\frac{u_{11}^{n+1} - u_{01}^{n+1}}{h_{x1}} + \frac{v_{11}^{n+1} - v_{10}^{n+1}}{h_{y1}} = p_{11}^{n+1}, u_{01}^{n+1} = \phi_{01}^{n+1}, v_{10}^{n+1} = \hat{\phi}_{10}^{n+1},$$

получается после подстановки

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ [F_{u11}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{21}^{n+1} - p_{11}^{n+1}}{h_{x2}}] - \phi_{01}^{n+1} \right\} + \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{h_{y1}} \left\{ [F_{v11}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{12}^{n+1} - p_{11}^{n+1}}{h_{y2}}] - \hat{\phi}_{10}^{n+1} \right\} = p_{11}^{n+1}$$

Разностные уравнения (10), (12), (14), (15) составлены во внутренних узлах Ω_h . Используя уравнение (3) в граничных узлах

$$S_h \text{ с индексами } i = N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1; \quad j = N_y, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \text{ получаем замкнутую систему для поля } p_{ij}^{n+1}.$$

5°. Согласно сказанному запишем (3) в граничных узлах $i = N_x, 1 \leq j \leq N_y - 1$:

$$\frac{u_{N_x j}^{n+1} - u_{N_x-1 j}^{n+1}}{h_{xN_x}} + \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x j-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{N_x j}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

где

$$u_{N_x j}^{n+1} = \varphi_{N_x j}^{n+1}, v_{N_x j}^{n+1} = \hat{\phi}_{N_x j}^{n+1}, v_{N_x j-1}^{n+1} = \hat{\phi}_{N_x j-1}^{n+1}, j = \overline{0, N_y - 1},$$

поэтому подставляется только $u_{N_x-1 j}^{n+1}$. Однако данное выражение точнее записывается через производную:

$$\frac{u_{N_x j}^{n+1} - u_{N_x-1 j}^{n+1}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} = p_{N_x j}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1$$

Отсюда получается граничное условие для p :

$$\frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \varphi_{N_x j}^{n+1} - [F_{uN_x-1 j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{N_x j}^{n+1} - p_{N_x-1 j}^{n+1}}{h_{xN_x}}] \right\} + \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x j-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{N_x j}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \text{ или более точно}$$

$$\frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \varphi_{N_x j}^{n+1} - [F_{uN_x-1 j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{N_x j}^{n+1} - p_{N_x-1 j}^{n+1}}{h_{xN_x}}] \right\} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} = p_{N_x j}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (16)$$

6°. Еще раз используем (3) в граничных узлах $j = N_y$:

$$\frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{iN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \text{ где}$$

$$u_{iN_y}^{n+1} = \varphi_{iN_y}^{n+1}, v_{iN_y}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1}, u_{i-1N_y}^{n+1} = \varphi_{iN_y-1}^{n+1}, i = \overline{0, N_x},$$

поэтому подставляется только $v_{iN_y-1}^{n+1}$. Данное выражение также записывается точнее через производную:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{v_{iN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

откуда вытекает еще одно граничное условие:

$$\frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - [F_{viN_y-1}^n + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{iN_y}^{n+1} - p_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}}] \right\} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

или более точно

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - [F_{viN_y-1}^n + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{iN_y}^{n+1} - p_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}}] \right\} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1 \quad (17)$$

Замкнутая система (10), (12), (14), (15), (16), (17) решается относительно p_{ij}^{n+1} итерационными методами. Для осуществления

этого удобно записать уравнения (10),(12), (14), (15) в единой формуле с помощью дискретной функции $sign(x)$: если $x > 0$, то $sign(x) = 1$, при $x = 0$ $sign(x) = 0$, если $x < 0$, то $sign(x) = -1$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{xi}} \left\{ \left[F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} \right] - \right. \\
& - \frac{1 + sign(i-1.5)}{2} \left[F_{ui-1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} \right] - \\
& \left. - \frac{1 - sign(i-1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} + \\
& + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ \left[F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \right] - \right. \\
& - \frac{1 + sign(j-1.5)}{2} \left[F_{vij-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} \right] - \\
& \left. - \frac{1 - sign(j-1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \right\} = p_{ij}^n, i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}
\end{aligned} \quad (18)$$

К системе (18) присоединяются граничные условия (16),(17):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \varphi_{N_xj}^{n+1} - \left[F_{uN_x-1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^o) \frac{p_{N_xj}^{n+1} - p_{N_x-1j}^{n+1}}{h_{xN_x}} \right] \right\} + \\
& + \frac{\hat{\varphi}_{N_xj}^{n+1} - \hat{\varphi}_{N_xj-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{N_xj}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\varphi_{iN_y}^{n+1} - \varphi_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - \left[F_{viN_y-1}^n + \right. \right.$$

$$+ \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{iN_y}^{n+1} - p_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}} \}} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1 \quad (20)$$

Схема2

[2]. Пусть вместо (3) используется схема с разностями вперед:

$$\frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} = p_{ij}^{n+1}, \quad (21)$$

$$0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1$$

Тогда согласно принципу взаимосогласованной аппроксимации из /3/ схемы (1) и (2) также будут видоизменены:

$$\rho_0 \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uij}^n + (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n + v_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vij}^n + (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}, \quad (22)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}, \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$$

Применяя (21),(22),(23) по аналогии с $1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o, 6^o$ получаем для сеточной функции p замкнутую систему уравнений:

$$\frac{1}{h_{xi+1}} \left\{ \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} u_{N_x j}^{n+1} + [F_{ui+1j}^n +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} \Big] \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} - \\
& \quad - [F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}] \Big\} + \\
& + \frac{1}{h_{yj+1}} \left\{ \frac{1 + \text{sign}(i - N_y + 1.5)}{2} v_{iN_y}^{n+1} + [F_{vij+1}^n + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \Big] \frac{1 - \text{sign}(i - N_y + 1.5)}{2} - \right. \\
& \quad \left. - [F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}] \Big\} = p_{ij}^{n+1}, u_{N_x j}^{n+1} = \varphi_{N_x j}^{n+1}, \\
& v_{iN_y}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1; \quad (24)
\end{aligned}$$

к (24) присоединяются граничные условия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{x1}} \left\{ [F_{u1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{1j}^{n+1} - p_{0j}^{n+1}}{h_{x1}}] - u_{0j}^{n+1} \right\} + \\
& + \frac{v_{0j+1}^{n+1} - v_{0j}^{n+1}}{h_{yj+1}} = p_{0j}^{n+1}, \quad i = 0, j = 1, \dots, N_y - 1; \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{i+10}^{n+1} - u_{i0}^{n+1}}{h_{xi+1}} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ [F_{vi1}^n + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i1}^{n+1} - p_{i0}^{n+1}}{h_{y1}}] - v_{i0}^{n+1} \right\} = p_{i0}^{n+1}, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$j = 0, i = 1, \dots, N_x - 1.$$

В (25) и (26) надо положить

$$u_{0j}^{n+1} = \varphi_{0j}^{n+1}, v_{0j}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0j}^{n+1}, u_{i0}^{n+1} = \varphi_{i0}^{n+1}, v_{i0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0}^{n+1},$$

$$v_{0j+1}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0j+1}^{n+1}, u_{i+10}^{n+1} = \varphi_{i+10}^{n+1}.$$

Схема3

[3]. Пусть вместо (3) используется аппроксимация /3/:

$$\frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}} = p_{ij}^{n+1},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (27)$$

В граничных узлах имеют место уравнения

$$\frac{u_{1j}^{n+1} - u_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \frac{v_{0j+1}^{n+1} - v_{0j}^{n+1}}{h_{yj+1}} = p_{0j}^{n+1},$$

$$\frac{u_{N_xj}^{n+1} - u_{N_x-1j}^{n+1}}{h_{xN_x}} + \frac{v_{N_xj}^{n+1} - v_{N_xj-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{N_xj}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$\frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{iN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yN_y}} = p_{iN_y}^{n+1}, \quad (28)$$

$$\frac{u_{i+10}^{n+1} - u_{i0}^{n+1}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{i1}^{n+1} - v_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} = p_{i0}^{n+1}, 1 \leq i \leq N_x - 1$$

Согласно принципу взаимосогласованной аппроксимации (см. /3/) схемы (1) и (2) также будут видоизменены:

$$\rho_0 \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uij}^n + (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n + v_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vij}^n + (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$u_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \quad (29)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \quad (30)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

Для поля p_{ij}^{n+1} уравнения составляются аналогично методике, изложенной в [1],[2] :

$$\begin{aligned} & \{ [F_{ui+1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+2j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}] \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \\ & \quad + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} u_{N_x j}^{n+1} - \\ & - [F_{ui-1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-2j}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}}] \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} - \\ & - \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \} \frac{1}{h_{xi} + h_{xi+1}} + \\ & + \{ [F_{vij+1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+2}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+2} + h_{yj+1}}] \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \\ & \quad + \frac{1 + \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} v_{iN_y}^{n+1} - \\ & - [F_{vij-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-2}^{n+1}}{h_{yj} + h_{yj-1}}] \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} - \\ & - \frac{1 - \text{sign}(j - 1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \} \frac{1}{h_{yj} + h_{yj+1}} = p_{ij}^{n+1}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$$

Граничные условия p_{ij}^{n+1} получаются из (28):

$$\frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \varphi_{N_x j}^{n+1} - [F_{uN_x-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{P_{N_x j}^{n+1} - P_{N_x-2j}^{n+1}}{h_{xN_x} + h_{xN_x-1}}] \right\} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} = P_{N_x j}^{n+1}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{x1}} \left\{ [F_{u1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{P_{2j}^{n+1} - P_{0j}^{n+1}}{h_{x2} + h_{x1}}] - \varphi_{0j}^{n+1} \right\} + \\ & + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} = P_{0j}^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N_y - 1; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - [F_{viN_y-1}^n + \right. \\ & \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{P_{iN_y}^{n+1} - P_{iN_y-2}^{n+1}}{h_{yN_y} + h_{yN_y-1}}] \right\} = P_{iN_y}^{n+1}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ [F_{vi1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{P_{i2}^{n+1} - P_{i0}^{n+1}}{h_{y2} + h_{y1}}] - \right. \\ & \left. - \hat{\varphi}_{i0}^{n+1} \right\} = P_{i0}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \end{aligned} \quad (35)$$

§4. Итерационный алгоритм Якоби

Решение системы (31),(32),(33),(34),(35) относительно P_{ij}^{n+1} можно найти методом простой итерации Якоби, обозначив

$P_{ij}^{n+1,k}$ k -итерацию P_{ij}^{n+1} . В пределе

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{ij}^{n+1,k} = P_{ij}^{n+1}, \quad \forall (i, j) \quad (36)$$

За нулевое приближение $k=0$ берется значение с предыдущего слоя времени $P_{ij}^{n+1,0} = P_{ij}^n, \quad \forall (i, j)$.

Метод Якоби для системы (31),(32),(33),(34),(35) имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \left\{ [F_{ui+1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+2j}^{n+1,k} - p_{ij}^{n+1,k+1}}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}] \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \\
& + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} u_{N_x, j}^{n+1} - \\
& - [F_{ui-1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1,k+1} - p_{i-2j}^{n+1,k}}{h_{xi} + h_{xi-1}}] \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} - \\
& \left. - \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} \frac{1}{h_{xi} + h_{xi+1}} + \\
& + \left\{ [F_{vij+1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+2}^{n+1,k} - p_{ij}^{n+1,k+1}}{h_{yj+2} + h_{yj+1}}] \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \right. \\
& + \frac{1 + \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} v_{iN_y}^{n+1} - \\
& - [F_{vij-1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij}^{n+1,k+1} - p_{ij-2}^{n+1,k}}{h_{yj} + h_{yj-1}}] \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} - \\
& \left. - \frac{1 - \text{sign}(j - 1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \right\} \frac{1}{h_{yj} + h_{yj+1}} = p_{ij}^{n+1,k+1}, \tag{37}
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1;$$

граничные значения итераций находятся из уравнений (28):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \phi_{N_x, j}^{n+1} - [F_{uN_x-1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{N_x, j}^{n+1,k+1} - p_{N_x-2j}^{n+1,k}}{h_{xN_x} + h_{xN_x-1}}] \right\} + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)_{N_x, j}^{n+1} = p_{N_x, j}^{n+1,k+1}, \\
& \frac{1}{h_{x1}} \left\{ [F_{u1j}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{2j}^{n+1,k} - p_{0j}^{n+1,k+1}}{h_{x2} + h_{x1}}] - \phi_{0j}^{n+1} \right\} + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} = p_{0j}^{n+1,k+1}, \\
& j = 1, \dots, N_y - 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - [F_{viN_y-1}^n + \right. \\
& \left. + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{iN_y}^{n+1,k+1} - p_{iN_y-2}^{n+1,k}}{h_{yN_y} + h_{yN_y-1}}] \right\} = p_{iN_y}^{n+1,k+1}, \\
& \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ [F_{vi1}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i2}^{n+1,k} - p_{i0}^{n+1,k+1}}{h_{y2} + h_{y1}}] - \right. \\
& \left. - \hat{\varphi}_{i0}^{n+1} \right\} = p_{i0}^{n+1,k+1}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, k = 0, 1, 2, \dots, k^* \quad (38)
\end{aligned}$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении основного критерия, указанного в (6) - §2 модуля-1:

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq N_x \\ 0 \leq j \leq N_y}} |R_{ij}^{k^*}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0$$

Последняя итерация p_{ij}^{n+1,k^*} , $i = 0, 1, \dots, N_x$, $j = 0, 1, \dots, N_y$ берется в качестве решения системы (31),(32),(33),(34),(35):

$$p_{ij}^{n+1,k^*} \approx p_{ij}^{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y.$$

§5. Глобальные итерационные алгоритмы

Алгоритм 1. В §5 k -итерация p_{ij}^{n+1} обозначена через $p_{ij}^{n+1,k}$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}^{n+1,k} = p_{ij}^{n+1}$, $\forall (i, j)$. По аналогии с этим обозначаются итерации с номером k сеточных функций

u_{ij}^{n+1} , v_{ij}^{n+1} через $u_{ij}^{n+1,k}$, $v_{ij}^{n+1,k}$, в пределе

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ij}^{n+1,k} = u_{ij}^{n+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_{ij}^{n+1,k} = v_{ij}^{n+1}, \quad \forall (i, j).$$

В связи с этим уравнения (29),(30) схемы 3 включаются в глобальный итерационный процесс следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{n+1,k} &= F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+1j}^{n+1,k} - p_{i-1j}^{n+1,k}}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \\
 v_{ij}^{n+1,k} &= F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+1}^{n+1,k} - p_{ij-1}^{n+1,k}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \\
 & i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1; \\
 (1+\theta) \frac{p_{ij}^{n+1,k+1} - p_{ij}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{u_{i+1j}^{n+1,k} - u_{i-1j}^{n+1,k}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1,k} - v_{ij-1}^{n+1,k}}{h_{yj+1} + h_{yj}} - p_{ij}^{n+1,k}, \\
 & 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \\
 (1+\theta) \frac{p_{N_xj}^{n+1,k+1} - p_{N_xj}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{\varphi_{N_xj}^{n+1} - u_{N_x-1j}^{n+1,k}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_xj}^{n+1} - p_{N_xj}^{n+1,k}, \\
 (1+\theta) \frac{p_{0j}^{n+1,k+1} - p_{0j}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{u_{1j}^{n+1,k} - \varphi_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} - p_{0j}^{n+1,k}, \\
 & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\
 (1+\theta) \frac{p_{iN_y}^{n+1,k+1} - p_{iN_y}^{n+1,k}}{\theta} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}} - p_{iN_y}^{n+1,k}, \\
 (1+\theta) \frac{p_{i0}^{n+1,k+1} - p_{i0}^{n+1,k}}{\theta} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \hat{\varphi}_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} - p_{i0}^{n+1,k}, \\
 & 1 \leq i \leq N_x - 1
 \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь невязки итераций равны

$$R_{ij}^k = (1 + \theta) \frac{P_{ij}^{n+1,k+1} - P_{ij}^{n+1,k}}{\theta}, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y \quad (40)$$

На точном решении системы невязки равны нулю $R_{ij}^* = 0, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$. В силу этого пределом невязок должен быть только нуль $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{ij}^k = 0$. На основании сказанного

итерации прекращаются на таком номере k^* , при котором выполняется основной критерий сходимости итераций:

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq N_x \\ 0 \leq j \leq N_y}} |R_{ij}^{k^*}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0,$$

что может быть использовано в эквивалентном виде

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq N_x \\ 0 \leq j \leq N_y}} |(1 + \theta) \frac{P_{ij}^{n+1,k^*+1} - P_{ij}^{n+1,k^*}}{\theta}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \quad (41)$$

При выполнении критерия (41) последние приближения

$P_{ij}^{n+1,k^*}, u_{ij}^{n+1,k^*}, v_{ij}^{n+1,k^*}$ берутся в качестве решения системы:

$$P_{ij}^{n+1,k^*} \approx P_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1,k^*} \approx u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1,k^*} \approx v_{ij}^{n+1}, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$$

Алгоритм 2

В (37)-(38) коэффициенты при $P_{ij}^{n+1,k+1}$ обозначим так:

$$A_{ij} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu) \left\{ \frac{1}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[\frac{1}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] + \frac{1}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left[\frac{1}{h_{yj+2} + h_{yj+1}} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} \right] \right\}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\begin{aligned}
A_{N_x j} &= 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{1}{h_{xN_x} (h_{xN_x} + h_{xN_x - 1})}, \\
A_{0j} &= 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{1}{h_{x1} (h_{x2} + h_{x1})}, \quad j = 1, \dots, N_y - 1; \\
A_{iN_y} &= 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{1}{h_{yN_y} (h_{yN_y} + h_{yN_y - 1})}, \\
A_{i0} &= 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu) \frac{1}{h_{y1} (h_{y2} + h_{y1})}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1;
\end{aligned}$$

С их помощью глобальный алгоритм 2 запишется кратко:

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1,k} &= F_{uij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{i+1j}^{n+1,k} - p_{i-1j}^{n+1,k}}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \\
v_{ij}^{n+1,k} &= F_{vij}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} (\lambda + \mu^0) \frac{p_{ij+1}^{n+1,k} - p_{ij-1}^{n+1,k}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \\
i &= 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1; \\
(1 + A_{ij}\theta) \frac{p_{ij}^{n+1,k+1} - p_{ij}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{u_{i+1j}^{n+1,k} - u_{i-1j}^{n+1,k}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1,k} - v_{ij-1}^{n+1,k}}{h_{yj+1} + h_{yj}} - p_{ij}^{n+1,k}, \\
1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \\
(1 + A_{N_x j}\theta) \frac{p_{N_x j}^{n+1,k+1} - p_{N_x j}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{\varphi_{N_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1j}^{n+1,k}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} - p_{N_x j}^{n+1,k}, \\
(1 + A_{0j}\theta) \frac{p_{0j}^{n+1,k+1} - p_{0j}^{n+1,k}}{\theta} &= \frac{u_{1j}^{n+1,k} - \varphi_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} - p_{0j}^{n+1,k}, \\
1 \leq j \leq N_y - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+A_{iN_y}\theta)\frac{p_{iN_y}^{n+1,k+1}-p_{iN_y}^{n+1,k}}{\theta} &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{iN_y}^{n+1}-v_{iN_y-1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}} - p_{iN_y}^{n+1,k}, \\
(1+A_{i0}\theta)\frac{p_{i0}^{n+1,k+1}-p_{i0}^{n+1,k}}{\theta} &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k}-\hat{\varphi}_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} - p_{i0}^{n+1,k}, \\
&1 \leq i \leq N_x - 1 \tag{42}
\end{aligned}$$

Процесс вычислений (42) останавливается на таком номере итераций k^* , при котором выполняется следующее неравенство

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq N_x \\ 0 \leq j \leq N_y}} \left| (1+A_{ij}\theta)\frac{p_{ij}^{n+1,k^*+1}-p_{ij}^{n+1,k^*}}{\theta} \right| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \tag{43}$$

При выполнении основного критерия (43) последние приближения $p_{ij}^{n+1,k^*}, u_{ij}^{n+1,k^*}, v_{ij}^{n+1,k^*}$ берутся в качестве решения системы: $p_{ij}^{n+1,k^*} \approx p_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1,k^*} \approx u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1,k^*} \approx v_{ij}^{n+1}$.

Разработанные выше глобальные итерационные алгоритмы автоматически используются на равномерной сетке, достаточно положить $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j$.

Итерационный параметр $\theta > 0$ выбирается из интервала $0 < \theta \leq 1/2$.

§6. Решение трехмерных задач теории упругости на равномерной сетке

Для трехмерных уравнений

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\
\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = p$$

Задается равномерная сетка

$$\Omega_h = \left\{ (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \right. \\ \left. i = 1, \dots, N_x - 1; j = 1, \dots, N_y - 1; m = 1, \dots, N_z - 1 \right\},$$

$$S_h = \{i = 0, i = \overline{N_x}, j = \overline{0}, \overline{N_y}, m = \overline{0}, \overline{N_z}; j = 0, j = N_y, \\ i = \overline{0}, \overline{N_x}, m = \overline{0}, \overline{N_z}; m = 0, m = N_z, j = \overline{0}, \overline{N_y}, i = \overline{0}, \overline{N_x}\}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h$$

Начальные условия на сетке Ω_h :

$$u_{ijm}^0 = d_{0ijm}, v_{ijm}^0 = \hat{d}_{0ijm}, w_{ijm}^0 = \hat{d}_{0ijm}, u_{ijm}^1 = d_{0ijm} + \tau d_{ijm}, \\ v_{ijm}^1 = \hat{d}_{0ijm} + \tau \hat{d}_{ijm}, w_{ijm}^1 = \hat{d}_{0ijm} + \tau \hat{d}_{ijm}, \\ i = \overline{1}, \overline{N_x - 1}, j = \overline{1}, \overline{N_y - 1}, m = \overline{1}, \overline{N_z - 1},$$

граничные условия 1 рода на сетке S_h :

$$x = 0, u_{0jm}^{n+1} = \varphi_{0jm}^{n+1}, v_{0jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, w_{0jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, \\ x = a_1, u_{N_x jm}^{n+1} = \varphi_{N_x jm}^{n+1}, v_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, w_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, \\ j = \overline{0}, \overline{N_y}, m = \overline{0}, \overline{N_z}, \\ y = 0, u_{i0m}^{n+1} = \varphi_{i0m}^{n+1}, v_{i0m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, w_{i0m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, \\ y = a_2, u_{iN_y m}^{n+1} = \varphi_{iN_y m}^{n+1}, v_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, w_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, \\ i = \overline{0}, \overline{N_x}, m = \overline{0}, \overline{N_z},$$

$$z = 0, u_{ij0}^{n+1} = \varphi_{ij0}^{n+1}, v_{ij0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}, w_{ij0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1},$$

$$z = a_3, u_{ijN_z}^{n+1} = \varphi_{ijN_z}^{n+1}, v_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1}, w_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1},$$

$$i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}$$

Полуявная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n = \mu \left[\frac{u_{i+1jm}^n - 2u_{ijm}^n + u_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1m}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{ijm+1}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{xijm},$$

$$Q_{vijm}^n = \mu \left[\frac{v_{i+1jm}^n - 2v_{ijm}^n + v_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1m}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{ijm+1}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{yijm},$$

$$Q_{wijm}^n = \mu \left[\frac{w_{i+1jm}^n - 2w_{ijm}^n + w_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{w_{ij+1m}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{ijm+1}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{zijm},$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijm}^{n+1} - 2u_{ijm}^n + u_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijm}^n + \lambda \frac{p_{i+1jm}^{n+1} - p_{i-1jm}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijm}^{n+1} - 2v_{ijm}^n + v_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijm}^n + \lambda \frac{p_{ij+1m}^{n+1} - p_{ij-1m}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}},$$

$$\rho_0 \frac{w_{ijm}^{n+1} - 2w_{ijm}^n + w_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijm}^n + \lambda \frac{p_{ijm+1}^{n+1} - p_{ijm-1}^{n+1}}{h_{zm+1} + h_{zm}},$$

$$\frac{u_{i+1jm}^{n+1} - u_{i-1jm}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1} - v_{ij-1m}^{n+1}}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1} - m_{ijm-1}^{n+1}}{2h_z} = P_{ijm}^{n+1},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_m - 1,$$

в граничных узлах S_h :

$$i = 0, \frac{u_{1jm}^{n+1} - \varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}\right)_{0jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z}\right)_{0jm}^{n+1} = p_{0jm}^{n+1},$$

$$i = N_x, \frac{\varphi_{N_xjm}^{n+1} - u_{N_x-1jm}^{n+1}}{h_x} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}\right)_{N_xjm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z}\right)_{N_xjm}^{n+1} = p_{N_xjm}^{n+1};$$

$$j = 0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{i0m}^{n+1} + \frac{v_{i1m}^{n+1} - \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}}{h_y} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z}\right)_{i0m}^{n+1} = p_{i0m}^{n+1},$$

$$j = N_y, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{iN_y m}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1} - v_{iN_y-1m}^{n+1}}{h_y} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z}\right)_{iN_y m}^{n+1} = p_{iN_y m}^{n+1};$$

$$m = 0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij0}^{n+1} + \frac{w_{ij1}^{n+1} - \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}\right)_{ij0}^{n+1} = p_{ij0}^{n+1},$$

$$m = N_z, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ijN_z}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}\right)_{ijN_z}^{n+1} = p_{ijN_z}^{n+1}$$

Глобальный итерационный процесс строится так:

$$F_{uijm}^n = 2u_{ijm}^n - u_{ijm}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} Q_{uijm}^n, F_{vijm}^n = 2v_{ijm}^n - v_{ijm}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} Q_{vijm}^n,$$

$$F_{w_{ijm}}^n = 2w_{ijm}^n - w_{ijm}^{n-1} + \frac{\tau^2}{\rho_0} Q_{w_{ijm}}^n,$$

$$u_{ijm}^{n+1,k} = F_{uijm}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{p_{i+1jm}^{n+1,k} - p_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x},$$

$$v_{ijm}^{n+1,k} = F_{vijm}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{P_{ij+1m}^{n+1,k} - P_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y},$$

$$W_{ijm}^{n+1,k} = F_{wijm}^n + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{P_{ijm+1}^{n+1,k} - P_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1,$$

$$(1 + A_{ijm} \theta) \frac{P_{ijm}^{n+1,k+1} - P_{ijm}^{n+1,k}}{\theta} = \frac{u_{i+1jm}^{n+1,k} - u_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1,k} - v_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y} + \frac{W_{ijm+1}^{n+1,k} - m_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z} - P_{ijm}^{n+1,k},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1,$$

$$(1 + A_{N_x jm} \theta) \frac{P_{N_x jm}^{n+1,k+1} - P_{N_x jm}^{n+1,k}}{\theta} = \frac{\varphi_{N_x jm}^{n+1} - u_{N_x-1jm}^{n+1,k}}{h_x} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_x jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{N_x jm}^{n+1} - P_{N_x jm}^{n+1,k},$$

$$(1 + A_{0jm} \theta) \frac{P_{0jm}^{n+1,k+1} - P_{0jm}^{n+1,k}}{\theta} = \frac{u_{1jm}^{n+1,k} - \varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{0jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{0jm}^{n+1} - P_{0jm}^{n+1,k}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1,$$

$$(1 + A_{iN_y m} \theta) \frac{P_{iN_y m}^{n+1,k+1} - P_{iN_y m}^{n+1,k}}{\theta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y m}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1} - v_{iN_y-1m}^{n+1,k}}{h_y} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{iN_y m}^{n+1} - p_{iN_y m}^{n+1, k}, \\
(1 + A_{i0m} \theta) \frac{p_{i0m}^{n+1, k+1} - p_{i0m}^{n+1, k}}{\theta} & = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i0m}^{n+1} + \frac{v_{i0m}^{n+1} - \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1, k}}{h_y} + \\
& + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{i0m}^{n+1} - p_{i0m}^{n+1, k}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1, \\
(1 + A_{ijN_z} \theta) \frac{p_{ijN_z}^{n+1, k+1} - p_{ijN_z}^{n+1, k}}{\theta} & = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1, k}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1} - p_{ijN_z}^{n+1, k}, \\
(1 + A_{ij0} \theta) \frac{p_{ij0}^{n+1, k+1} - p_{ij0}^{n+1, k}}{\theta} & = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ij0}^{n+1} + \frac{w_{ij1}^{n+1} - \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1, k}}{h_z} + \\
& + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ij0}^{n+1} - p_{ij0}^{n+1, k}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{ijm} & = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[\frac{1}{2h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \left. \right] + \frac{1}{2h_y} \left[\frac{1}{2h_y} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \right. \\
& + \frac{1}{2h_y} \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} \left. \right] + \frac{1}{2h_z} \left[\frac{1}{2h_z} \frac{1 - \text{sign}(m - N_z + 1.5)}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2h_z} \frac{1 + \text{sign}(m - 1.5)}{2} \right] \left. \right\}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1; \\
A_{N_x jm} & = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_x^2}, A_{0jm} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_x^2}, \\
& j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;
\end{aligned}$$

$$A_{iN_y, m} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_y^2}, A_{i0m} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_y^2},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$A_{ijN_z} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_z^2}, A_{ij0} = 1 + \frac{\tau^2}{\rho_0} \lambda \frac{1}{2h_z^2},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$$

Параметр $\theta > 0$ выбирается из интервала $0 < \theta \leq 1/2$. Процесс вычислений останавливается на таком номере итераций k^* , при котором выполняется следующее неравенство для невязки

$$\max_{0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq m \leq N_z} |R_{ijm}^{k^*}| \leq \varepsilon, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0$$

При выполнении данного критерия последние приближения $P_{ijm}^{n+1, k^*}, U_{ijm}^{n+1, k^*}, V_{ijm}^{n+1, k^*}, W_{ijm}^{n+1, k^*}$ берутся в качестве решения

$$P_{ijm}^{n+1, k^*} \approx P_{ijm}^{n+1}, U_{ijm}^{n+1, k^*} \approx U_{ijm}^{n+1}, V_{ijm}^{n+1, k^*} \approx V_{ijm}^{n+1}, W_{ijm}^{n+1, k^*} \approx W_{ijm}^{n+1},$$

$$i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, m = 0, \dots, N_z.$$

Замечание. Данные численные алгоритмы можно применять в качестве метода установления при решении задач упругого равновесия.

§7. Численный алгоритм решения гиперболических уравнений электродинамики

Привлекаются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1); \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2);$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3); \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4);$$

$$\vec{j} = \delta \vec{E}, \quad (5); \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (6); \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (7)$$

В данную систему из 7 уравнений входят 6 искоемых функций $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{j}, \rho$, в силу чего она является переопределенной системой, т.е. не хватает еще одной искомой физической величины.

Несмотря на переопределенность, уравнения (1)-(7) используются при расчетах электромагнитных полей. Предлагаемая методика принципиально отличается от известных тем, что применена методология решения уравнений *Навье /3/*.

Если в рассчитываемой области имеются сторонние заряды, то они имеют ненулевую плотность $\rho \neq 0$ и эту плотность можно вычислить наряду с \vec{E} , используя следующий подход.

Применяется оператор «rot» к обеим частям (1):

$$\text{rot rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}. \quad (8)$$

В силу связей (7) и (3) получается

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \quad (9)$$

Подстановка закона *Ома* (5) и (6) в правую часть (9) дает

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu (\delta \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (10)$$

На основании (10) и (8) получается

$$\text{rot rot } \vec{E} = - \mu_0 \mu (\delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) \quad (11)$$

Раскрывая левое выражение в (11) по формуле

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad (12)$$

Из (11) получается уравнение квазигиперболического типа

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{grad div } \vec{E} \quad (13)$$

К (13) присоединяется уравнение (2), которое по связи (6) приводится к виду

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (14)$$

Подставляя (14) в правую часть (13), имеем уравнение

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{E} - (\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \operatorname{grad} \rho \quad (15)$$

Удобно ввести обозначение: $\beta = (\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon)^{-1}$. Система двух уравнений (14), (15) является замкнутой системой относительно двух функций ρ, \vec{E} и подобна уравнениям гидродинамики, поэтому она может быть решена численно конечно-разностными методами, если для этих уравнений поставлена соответствующая начально-краевая задача.

Пусть будет эта задача с краевыми условиями первого рода для \vec{E} на границе параллелепипеда $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_m \leq a_i, m = 1, 2, 3\}$.

В декартовой системе (x_1, x_2, x_3) ,

$$\vec{E} = E_1 \vec{i}_1 + E_2 \vec{i}_2 + E_3 \vec{i}_3 = \sum_{m=1}^3 E_m \vec{i}_m$$

проекция уравнения (15) и (14) имеют вид:

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_m}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \sum_{s=1}^3 \frac{\partial^2 E_m}{\partial x_s^2} - \beta \frac{\partial \rho}{\partial x_m}, m = 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho, \quad (17)$$

Начальные условия при $t=0$:

$$E_m \Big|_{t=0} = d_m(\vec{r}), m = 1, 2, 3, \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_m(\vec{r}), m = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Краевые условия на границе Γ области $\bar{\Omega}$:

$$E_m \Big|_S = \varphi_m(\vec{r}, t), \vec{r} \in S, m = 1, 2, 3 \quad (20)$$

Для численного решения воспользуемся равномерными сетками, обозначив

$E_m(x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}, t^n) \equiv E_{mijk}^n, x_{1i} = ih_1, x_{2j} = jh_2, x_{3k} = kh_3,$
 $t_n = n\tau, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, k = 0, 1, \dots, N_3, n = 0, 1, \dots,$
 причем значения индексов $i = 0, i = N_1, j = 0, j = N_2, k = 0, k = N_3$
 соответствуют множеству граничных узлов S, h_1, h_2, h_3, τ - шаги
 сетки.

Вполне применима следующая полуявная схема из [3]:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \varepsilon \frac{E_{mijk}^{n+1} - 2E_{mijk}^{n-1} + E_{mijk}^{n-1}}{\tau^2} + \delta \frac{E_{mijk}^{n+1} - E_{mijk}^{n-1}}{2\tau} = \\ & = (\mu_0 \mu)^{-1} \left[\frac{E_{mi-1jk}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mi+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{E_{mij-1k}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mi+1j+k}^n}{h_y^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E_{mijk-1}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mijk+1}^n}{h_z^2} \right] - \\ & - \beta \left\{ \frac{(m-2)(m-3)}{2} \times \frac{\rho_{i+1jk}^{n+1} - \rho_{i-1jk}^{n+1}}{2h_x} + (m-1)(3-m) \times \frac{\rho_{ij+1k}^{n+1} - \rho_{ij-1k}^{n+1}}{2h_y} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \times \frac{\rho_{ijk+1}^{n+1} - \rho_{ijk-1}^{n+1}}{2h_z} \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots, 1 \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1, n = 1, 2, \dots$$

При аппроксимации уравнения неразрывности используется

принцип взаимосогласованности аппроксимаций $\frac{\partial \rho}{\partial x_m}$ и $\frac{\partial E_m}{\partial x_m}$

в (16), (17), основным моментом этого принципа является также

то, что если в каком-либо узле сетка (x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}) вычисляется

ρ_{ijk}^n , то в этом узле обязательно должна быть

взаимосогласованная аппроксимация уравнения неразрывности,

с использованием которой вычисляется ρ_{ijk}^n . В (21) $\frac{\partial \rho}{\partial x_m}$

аппроксимированы центральной разностью, поэтому

соответствующее $\frac{\partial E_m}{\partial x_m}$ тоже должно быть аппроксимировано центральной разностью. Вообще говоря, согласно данному принципу, если $\frac{\partial \rho}{\partial x_m}$ аппроксимировано разностью назад (вперед), то $\frac{\partial E_m}{\partial x_m}$ должно быть аппроксимировано разностью вперед (назад). Поэтому во внутренних узлах (17) заменяется разностной схемой:

$$\frac{E_{1i+1jk}^{n+1} - E_{1i-1jk}^{n+1}}{2h_x} + \frac{E_{2ij+1k}^{n+1} - E_{2ij-1k}^{n+1}}{2h_y} + \frac{E_{3ijk+1}^{n+1} - E_{1ijk-1}^{n+1}}{2h_z} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijk}^{n+1},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1 \quad (22)$$

Схема (21) имеет погрешность $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$, схема (22) - $O(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$.

В граничных узлах параллелепипеда $\bar{\Omega}$ значения индексов равны $i=0; i = N_x; j = 0, j = N_y; k = 0, k = N_z$. Рассмотрим два способа аппроксимации уравнения (17) в граничных узлах: простой и усложненный.

В простом способе аппроксимация нормальных к грани параллелепипеда производных делается с 1-м порядком погрешности. Покажем это на гранях $x_m=0$ и $x_m = a_m, m=1,2,3$.

На границах $x_m=0$ и $x_m = a_m$, в силу (20) уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial E_m}{\partial x_m} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^3 \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S \quad (23)$$

Для аппроксимации в (23) нормальных производных $\frac{\partial E_m}{\partial x_m}$ можно применить и усложненный способ. В простом способе

используются разности вперед на границе $x_m = 0$, дающие первый порядок погрешности:

$$m = 1: \frac{E_{11jk}^{n+1} - E_{10jk}^{n+1}}{h_x} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{0jk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{0jk}^{n+1},$$

$$\frac{E_{1N_x-1jk}^{n+1} - E_{1N_x-1jk}^{n+1}}{h_x} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{N_xjk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_xjk}^{n+1}, \quad (24)$$

аналогично для $m = 2, m = 3$

$$\frac{E_{2iNk}^{n+1} - E_{2iN-1jk}^{n+1}}{h_y} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{iNk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{iNk}^{n+1}, \quad (25)$$

где $N = 1$ для $x_2 = 0$ и $N = N_y$ для $x_2 = a_2$;

$$\frac{E_{ijN}^{n+1} - E_{ijN-1}^{n+1}}{h_z} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ijN}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijN}^{n+1}, \quad (26)$$

где $N = 1$ для $x_3 = 0$ и $N = N_z$ для $x_3 = a_3$.

Алгоритм реализации схем (21), (22), (24), (25), (26).

Обозначив в (21) известные величины

$$Q_{mijk}^n = (\mu_0 \mu)^{-1} \left[\frac{E_{mi-1jk}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mi+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{E_{mij-1k}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mij+1k}^n}{h_y^2} + \frac{E_{mijk-1}^n - 2E_{mijk}^n + E_{mijk+1}^n}{h_z^2} \right] + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{2E_{mijk}^n - E_{mijk}^{n-1}}{\tau^2} + \frac{\delta}{2\tau} E_{mijk}^{n-1}, \quad (27)$$

$$A = \varepsilon_0 \varepsilon \tau^{-2} + \delta (2\tau)^{-1}$$

представим (27) в виде

$$E_{1ijk}^{n+1} = A^{-1} \left[Q_{1ijk}^n - \beta \frac{\rho_{i+1jk}^{n+1} - \rho_{i-1jk}^{n+1}}{2h_x} \right], \quad (28)$$

$$E_{2ijk}^{n+1} = A^{-1} \left[Q_{2ijk}^n - \beta \frac{\rho_{ij+1k}^{n+1} - \rho_{ij-1k}^{n+1}}{2h_y} \right], \quad (29)$$

$$E_{3ijk}^{n+1} = A^{-1} \left[Q_{3ijk}^n - \beta \frac{\rho_{ijk+1}^{n+1} - \rho_{ijk-1}^{n+1}}{2h_z} \right], \quad (30)$$

Очевидно, для определения E_{mijk}^{n+1} , $m = 1, 2, 3$, а также ρ_{ijk}^{n+1} , (22), (24), (25), (26) и (28), (29), (30). С этой целью исключим E_{mijk}^{n+1} , $m = 1, 2, 3$ путем подстановки (28), (29), (30) в (22), (24), (25), (26).

Ключевую идею указанных подстановок покажем для одного направления x_{i_1} , для двух других все аналогично. Начнем с подстановки (28) в первое разностное соотношение

$$(2h_x)^{-1} (E_{i+1jk}^{n+1} - E_{i-1jk}^{n+1}) \quad (31)$$

Тут надо иметь ввиду, что в приграничных узлах $i=1$ и $i = N_x - 1$ это соотношение примет вид, соответственно:

$$(2h_x)^{-1} (E_{12jk}^{n+1} - E_{i0jk}^{n+1}) \text{ при } i=1, \quad (32)$$

$$(2h_x)^{-1} (E_{1N_xjk}^{n+1} - E_{1N_x-2jk}^{n+1}) \text{ при } i=N_x-1, \quad (33)$$

где согласно граничному условию (20), $E_{10jk}^{n+1} = \varphi_{10jk}^{n+1}$, $E_{1N_xjk}^{n+1} = \varphi_{1N_xjk}^{n+1}$ известные величины. Поэтому (28) подставляется в (31) при $2 \leq i \leq N_x - 2$ отдельно, затем в (32), (33) и (24).

Последовательное осуществление этих четырех этапов дает следующую систему относительно ρ_{ijk}^{n+1} . Подстановка в (22) дает:

$$(2h_x)^{-1} \left\{ A^{-1} [Q_{i+1jk}^n - \beta (2h_x)^{-1} (\rho_{i+2jk}^{n+1} - \rho_{ijk}^{n+1})] - \right. \\ \left. - A^{-1} [Q_{i-1jk}^n - \beta (2h_x)^{-1} (\rho_{ijk}^{n+1} - \rho_{i-2jk}^{n+1})] \right\} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijk}^{n+1}, \quad (34)$$

$$2 \leq i \leq N_x - 2, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1;$$

подстановка в (32):

$$\begin{aligned} & (2h_x)^{-1} \left\{ A^{-1} [Q_{12jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{3jk}^{n+1} - \rho_{1jk}^{n+1})] - \varphi_{10jk}^{n+1} \right\} = \\ & = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{0jk}^{n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$i = 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1$$

подстановка в (33):

$$\begin{aligned} & (2h_x)^{-1} \left\{ \varphi_{1N_xjk}^{n+1} - A^{-1} [Q_{1N_x-2jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{N_x-1jk}^{n+1} - \rho_{N_x-3jk}^{n+1})] \right\} = \\ & = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_xjk}^{n+1}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$i = N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1;$$

подстановка в (24):

$$\begin{aligned} & h_x^{-1} \left\{ A^{-1} [Q_{11jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{2jk}^{n+1} - \rho_{0jk}^{n+1})] - \varphi_{10jk}^{n+1} + \sum_{s=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s} \right)_{0jk}^{n+1} \right\} = \\ & = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{0jk}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & h_x^{-1} \left\{ \varphi_{1N_x-1jk}^{n+1} - A^{-1} [Q_{1N_x-1jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{N_xjk}^{n+1} - \rho_{N_x-2jk}^{n+1})] \right\} + \\ & + \sum_{s=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s} \right)_{N_xjk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_xjk}^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1 \end{aligned} \quad (38)$$

Если воспользоваться дискретной функцией $\text{sign}(B) = -1$ при $B < 0$, $\text{sign}(B) = 0$ при $B = 0$, $\text{sign}(B) = 1$ при $B > 0$, то (34), (35), (36) можно записать в виде одного выражения

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \text{sign}(i-1,5)}{2} * (35) + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1,5)}{2} * (36) + \\ & + \text{sign}(i-1) * \text{sign}(N_x - 1 - i) * (34) \end{aligned} \quad (39)$$

2⁰. Итерационные процессы вычисления ρ_{ijk}^{n+1}

Считая, что аналогичная (34) – (38) подстановки совершены для компонентов E_{2ijk}^{n+1} и E_{3ijk}^{n+1} , тем самым получены разностные уравнения, идентичные (37), (38), (39) относительно ρ_{ijk}^{n+1} , остановимся здесь на двух простейших итерационных

методах нахождения ρ_{ijk}^{n+1} из этих уравнений. Для удобства записи опустим верхний индекс « $n+1$ » и вместо него напишем номер итерации « s », $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{ijk}^{(s)} = \rho_{ijk}^{n+1}$, причем $\rho_{ijk}^0 = \rho_{ijk}^n$.

Алгоритм 1

Используется запись (39):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ijk}^{(s)}}{\theta} + \frac{1 - \text{sign}(i-1,5)}{2} (2h_x)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ A^{-1} [Q_{12jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{i+2jk}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \varphi_{10jk}^{n+1} \right\} + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1, 5)}{2} \times \\
 & \times (2h_x)^{-1} \left\{ \varphi_{1N_xjk}^{n+1} - A^{-1} [Q_{1N_x-2jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{i-2jk}^{(s)})] \right\} + \\
 & + \text{sign}(i-1) \times \text{sign}(N_x - 1 - i) (2h_x)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ A^{-1} [Q_{1i+1jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{i+2jk}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \right. \\
 & \left. - A^{-1} [Q_{1i-1jk}^n - \beta(2h_x)^{-1} (\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{i-2jk}^{(s)})] \right\} + \\
 & + \frac{1 - \text{sign}(j-1,5)}{2} * (2h_y)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ A^{-1} [Q_{2i2k}^n - \beta(2h_y)^{-1} (\rho_{ij+2k}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \varphi_{2i0k}^{n+1} \right\} + \\
 & + \frac{1 + \text{sign}(j - N_y + 1, 5)}{2} (2h_y)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ \varphi_{2iN_yk}^{n+1} - A^{-1} [Q_{2iN_y-2k}^n - \beta(2h_y)^{-1} (\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ij-2k}^{(s)})] \right\} + \\
 & + \text{sign}(j-1) \text{sign}(N_y - 1 - j) (2h_y)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ A^{-1} [Q_{2ij+1k}^n - \beta(2h_y)^{-1} (\rho_{ij+2k}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \right. \\
 & \left. - A^{-1} [Q_{2ij-1k}^n - \beta(2h_y)^{-1} (\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ij-2k}^{(s)})] \right\} + \\
 & + \frac{1 - \text{sign}(k-1,5)}{2} (2h_z)^{-1} \left\{ A^{-1} [Q_{3ij2}^n - \beta(2h_z)^{-1} (\rho_{ijk+2}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \varphi_{3ij0}^{n+1} \right\} + \\
 & + \frac{1 + \text{sign}(k - N_z + 1, 5)}{2} (2h_z)^{-1} \left\{ \varphi_{3ijN_z}^{n+1} - \beta(2h_z)^{-1} (\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ijk-2}^{(s)}) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{sign}(k-1)\text{sign}(N_z-1-k)(2h_z)^{-1} \times \\
& \times \left\{ A^{-1}[Q_{3ijk+1}^n - \beta(2h_z)^{-1}(\rho_{ijk+2}^{(s)} - \rho_{ijk}^{(s+1)})] - \right. \\
& \left. - A^{-1}[Q_{3ijk-1}^n - \beta(2h_z)^{-1}(\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ijk-2}^{(s)})] \right\} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijk}^{(s)}, \\
& 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1, 1 \leq k \leq N-1 \quad (40)
\end{aligned}$$

Разностные выражения (37) и (38) и аналогичные им еще 4 играют роль граничных условий типа *фон Неймана*, для них пишется:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{0,jk}^{(s+1)} - \rho_{0,jk}^{(s)}}{\theta} + h_x^{-1} \left\{ A^{-1}[Q_{11,jk}^n - \beta(2h_x)^{-1}(\rho_{2,jk}^{(s)} - \rho_{0,jk}^{(s+1)})] - \varphi_{10,jk}^{n+1} \right\} + \\
& + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{0,jk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{0,jk}^{(s)}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1; \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{N_x,jk}^{(s+1)} - \rho_{N_x,jk}^{(s)}}{\theta} + h_x^{-1} \left\{ \varphi_{1N_x-1,jk}^{n+1} - A^{-1}[Q_{1N_x-1,jk}^n - \beta(2h_x)^{-1}(\rho_{N_x,jk}^{(s+1)} - \rho_{N_x-2,jk}^{(s)})] \right\} + \\
& + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{N_x,jk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_x,jk}^{(s)}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1; \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{i0k}^{(s+1)} - \rho_{i0k}^{(s)}}{\theta} + h_y^{-1} \left\{ A^{-1}[Q_{2i1k}^n - \beta(2h_y)^{-1}(\rho_{i2k}^{(s)} - \rho_{i0k}^{(s+1)})] - \varphi_{2i0k}^{n+1} \right\} + \\
& + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{i0k}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{i0k}^{(s)}, 1 \leq i \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1; \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{iN_y,k}^{(s+1)} - \rho_{iN_y,k}^{(s)}}{\theta} + h_y^{-1} \left\{ \varphi_{2iN_y-1k}^{n+1} - A^{-1}[Q_{2iN_y-1k}^n - \beta(2h_y)^{-1}(\rho_{iN_y,k}^{(s+1)} - \rho_{iN_y-2k}^{(s)})] \right\} + \\
& + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{iN_y,k}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{iN_y,k}^{(s)}, 1 \leq i \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1; \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho_{ij0}^{(s+1)} - \rho_{ij0}^{(s)}}{\theta} + h_z^{-1} \left\{ A^{-1}[Q_{3ij1}^n - \beta(2h_z)^{-1}(\rho_{ij2}^{(s)} - \rho_{ij0}^{(s+1)})] - \varphi_{3ij0}^{n+1} \right\} +$$

$$+ \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ij0}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ij0}^{(s)}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq k \leq N_y - 1; \quad (45)$$

$$\frac{\rho_{ijN_z}^{(s+1)} - \rho_{ijN_z}^{(s)}}{\theta} + h_z^{-1} \left\{ \varphi_{3ijN_z}^{n+1} - A^{-1} [Q_{3ijN_z-1}^n - \beta (2h_z)^{-1} (\rho_{ijN_z}^{(s+1)} - \rho_{ijN_z-2}^{(s)})] \right\} +$$

$$+ \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ijN_z}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijN_z}^{(s)}, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 1 \leq k \leq N_y - 1, \quad s=0, 1, \dots \quad (46)$$

Итерационный параметр $\theta > 0$ достаточно выбрать из интервала $0 < \theta < 1$, чтобы обеспечить быструю сходимость итераций. Итерации (40)-(46) ведутся до выполнения уравнений неразрывности (22), (24)-(26) с удовлетворительной точностью.

Алгоритм 2

Этот метод является упрощением первого метода (40)-(46), стоит только заменить стоящие в скобках $\rho_{ijk}^{(s+1)}$ на $\rho_{ijk}^{(s)}$, т.е. является *явным* итерационным методом, а значит условно сходящимся. Он удобен для программирования по сравнению с (40)-(46). Идея заключается в совместном итерировании уравнений (28), (29), (30) и (22), (25), (26). Опуская верхний индекс «n+1» в (28), (29), (30) и заменяя его на индекс итерации «s» и имея в виду пределы $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{ijk}^{(s)} = \rho_{ijk}^{n+1}$, $\lim_{s \rightarrow \infty} E_{mijk}^{(s)} = E_{mijk}^{n+1}$, $m = 1, 2, 3$ организуем итерационный процесс в виде следующего.

Записываем (28), (29), (30) на s - итерации, причем нулевая итерация равна $\rho_{ijk}^{(0)} = \rho_{ijk}^n$, $E_{mijk}^{(0)} = E_{mijk}^n$, $m = 1, 2, 3$; на границе $E_{mijk}^{(s)} = \varphi_{mijk}^{n+1}$, а во внутренних узлах

$$E_{mijk}^{(s)} = A^{-1} [Q_{mijk}^n - \beta \left\{ \frac{(m-2)(m-3)}{2} \frac{\rho_{i+1jk}^{(s)} - \rho_{i-1jk}^{(s)}}{2h_x} \right\} -$$

$$- \beta \left\{ (m-1)(3-m) \frac{\rho_{ij+1k}^{(s)} - \rho_{ij-1k}^{(s)}}{2h_y} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \frac{\rho_{ijk+1}^{(s)} - \rho_{ijk-1}^{(s)}}{2h_z} \right\}],$$

$$m=1,2,3, 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq i \leq N_y - 1, \quad 1 \leq i \leq N_z - 1 \quad (47)$$

причем $m=1$ соответствует (28), $m=2$ – (29), $m=3$ – (30).

Подстановки (47) в (22), (32), (33), (24) в явном виде приведут к выражениям типа (34), (35), (36), (37), (38), (39). Если учесть, что в приграничных узлах с номерами $i=1$, $i=N_x-1$, соответственно, $j=1$, $j=N_y-1$, $k=1$, $k=N_z-1$ имеют место обстоятельства (32), (33), то осуществляя явную подстановку (47) в (22), (24), (25), (26) итерационный процесс второго метода можно записать, имея в виду (47):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{ijk}^{(s+1)} - \rho_{ijk}^{(s)}}{\theta} + \frac{E_{1i+1jk}^{(s)} - E_{1i-1jk}^{(s)}}{2h_x} + \frac{E_{2ij+1k}^{(s)} - E_{2ij-1k}^{(s)}}{2h_y} + \\ & + \frac{E_{3ijk+1}^{(s)} - E_{3ijk-1}^{(s)}}{2h_z} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijk}^{(s)}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq i \leq N_z - 1 \end{aligned} \quad (48)$$

В граничных узлах используются записи (24), (25), (26)

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{ojk}^{(s+1)} - \rho_{ojk}^{(s)}}{\theta} + \frac{E_{11jk}^{(s)} - \varphi_{10jk}^{n+1}}{h_x} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ojk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ojk}^{(s)}, \\ & 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{N_x jk}^{(s+1)} - \rho_{N_x jk}^{(s)}}{\theta} + \frac{\varphi_{1N_x jk}^{(n+1)} - E_{1N_x-1jk}^{(s)}}{h_x} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{N_x jk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_x jk}^{(s)}, \\ & 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{i0k}^{(s+1)} - \rho_{i0k}^{(s)}}{\theta} + \frac{E_{2i1k}^{(s)} - \varphi_{2i0k}^{n+1}}{h_x} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{i0k}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{i0k}^{(s)}, \\ & 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{iN_y k}^{(s+1)} - \rho_{iN_y k}^{(s)}}{\theta} + \frac{\varphi_{12iN_y k}^{n+1} - E_{2iN_y-1k}^{(s)}}{h_x} + \sum_{l=1, l \neq 2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{iN_y k}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{iN_y k}^{(s)}, \\ & 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq k \leq N_z - 1, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{\rho_{ij0}^{(s+1)} - \rho_{ij0}^{(s)}}{\theta} + \frac{E_{3ij1}^{(s)} - \varphi_{3ij0}^{n+1}}{h_x} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ij0}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ij0}^{(s)},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad (53)$$

$$\frac{\rho_{ijN_z}^{(s+1)} - \rho_{ijN_z}^{(s)}}{\theta} + \frac{\varphi_{3ijN_z}^{n+1} - E_{3ijN_z-1}^{(s)}}{h_x} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{ijN_z}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{ijN_z}^{(s)},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \bar{s} \quad (54)$$

Весь алгоритм (47)–(54) циклически повторяется до выполнения критерия сходимости итераций для невязки

$$\max_{i,j,k} \left| R_{ijk}^{(s)} \right| \leq \varepsilon, \quad (55)$$

где $\varepsilon \approx 0$ близкое к нулю положительное число, дающее удовлетворительную точность выполнения уравнений (22), (24)–(26). В качестве E_{ijk}^{n+1} , ρ_{ijk}^{n+1} после выполнения условия (55)

берутся: $E_{ijk}^{n+1} = E^{(s)ijk}$, $\rho_{ijk}^{n+1} = \rho^{(s)ijk}$.

Очевидно, алгоритм первого метода (40)–(46) тоже можно представить в виде аналогичном (47)–(55).

Точность аппроксимации уравнения (23) в граничных узлах можно повысить известным способом, применяя в (24), (25), (26) разностные выражения в узлах с номерами $i=0, j=0, k=0$:

$$\left(\frac{\partial E_m}{\partial x_m} \right)_{ijk}^{n+1} = \frac{-3E_{m0}^{n+1} + 4E_{m1}^{n+1} - E_{m2}^{n+1}}{2h} + O(h^2), \quad (56)$$

и в узлах с номерами $i = N_x, j = N_y, k = N_z$.

$$\left(\frac{\partial E_m}{\partial x_m} \right)_{ijk}^{n+1} = \frac{3E_{mN}^{n+1} - 4E_{mN-1}^{n+1} - E_{mN-2}^{n+1}}{2h} + O(h^2), \quad (57)$$

Тогда вместо (49), (50) соответственно, применяются итерации с использованием (49), (50):

$$\frac{\rho_{0jk}^{(s+1)} - \rho_{0jk}^{(s)}}{\theta} + \frac{-3\varphi_{10jk}^{n+1} + 4E_{11jk}^s + E_{12jk}^s}{2h} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{0jk}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{0jk}^{(s)}, \quad (58)$$

$$\frac{\rho_{N_x j k}^{(s+1)} - \rho_{N_x j k}^{(s)}}{\theta} + \frac{3\varphi_{1N_x j k}^{n+1} - 4E_{1N_x-1 j k}^s + E_{1N_x-2 j k}^s}{2h} + \sum_{l=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l} \right)_{N_x j k}^{n+1} = (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \rho_{N_x j k}^{(s)}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1, \\ 0 < \theta < [\beta A^{-1} 2^{-2} (h_x^{-2} + h_y^{-2} + h_z^{-2})]^{-1}$$

и так далее.

Полуявная схема (21), (22) при аппроксимациях типа (56), (57) имеет 2-й порядок точности по всем переменным.

В качестве условия устойчивости схемы (21) можно принять известное условие *Куранта*:

$$\tau \leq \sqrt{\mu_0 \mu} (h_x^{-2} + h_y^{-2} + h_z^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Вопросы.

1. Методом фон Неймана исследовать устойчивость неявной схемы.
2. Методом фон Неймана исследовать устойчивость явной схемы.
3. Написать явную схему уравнений теории упругости для аппроксимации

$$\frac{u_{i+1 j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{h_{x+1}} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} = p_{ij}^{n+1}.$$

4. Написать явную схему теории упругости для аппроксимации

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1 j}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} = p_{ij}^{n+1}.$$

5. Написать итерационный метод Якоби для схемы пункта 4.

Модуль-11 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

Численный метод решения уравнений динамики вязкой жидкости в естественных физических переменных «скорость-давление» излагается на примере расчета конкретной двумерной задачи обтекания пластины.

§1. Постановка задачи продольного обтекания пластины

Для расчета двумерного продольного обтекания пластины используется система уравнений, предложенная *Джакуповым К.Б.* в /17/, /19/:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial v'_j v'_i}{\partial x_j} - \frac{t^o}{2} \sum_j \frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t \partial x_j} \right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \\ & = \rho \bar{F}_i + \mu \Delta \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \sum_j (\bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}) + \frac{t^o}{2} \sum_j \frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t \partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \\ & = \rho F'_i + \mu \Delta v'_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{v}_i \Big|_{\sigma} = \bar{\varphi}_i, \bar{v}_i \Big|_{t=0} = \bar{v}_i^0, v'_i \Big|_{\sigma} = \varphi'_i, v'_i \Big|_{t=0} = v'^0_i \quad (5)$$

для моделирования как ламинарного ($v'_i \equiv 0, i=1,2,3$) так и турбулентного ($v'_i \neq 0, i=1,2,3$) режимов (переключающийся режим учитывается автоматически) обтекания пластины и других объектов. В обозначениях

$$\bar{v}_1 \equiv u, \bar{v}_2 \equiv v, \bar{p} \equiv p, \bar{F}_1 \equiv F_x, \bar{F}_2 \equiv F_y, v'_1 \equiv u', v'_2 \equiv v'$$

система принимает вид

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u' v'}{\partial y} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ & = \rho F_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ & = \rho F_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u'}{\partial x} + v \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \\ & = \rho F'_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + v \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial v}{\partial x} + v' \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial p'}{\partial y} = \\ & = \rho F'_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

Уравнения (6),(7),(8) переходят при $u' \equiv 0, v' \equiv 0, \forall (x, y, t)$ в уравнения *Навье* несжимаемой жидкости.

В начальный момент времени $t=0$ жидкость находится в состоянии покоя:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L + 2l, \quad 0 \leq y \leq H,$$

в некоторый момент времени $t^* = t_n^*$ на течение, полученное на этот момент времени численным методом, *накладывается* “случайное” возмущение, т.е. в узлах сетки в этот момент полагаются

$$u_{ij}^{n*} = u_{ij}^n + \zeta_{ij}, \quad v_{ij}^{n*} = v_{ij}^n + \xi_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1,$$

где $\zeta_{ij} = \zeta(x_i, y_j)$ и $\xi_{ij} = \xi(x_i, y_j)$ близкие к нулю случайные

функции, имитирующие начальные возмущения в потоке (их можно задавать с помощью датчика случайных чисел).

Краевые условия: набегающий поток имеет скорости
 $x = 0, u(0, y, t) = U_\infty \exp(-b'/t), v(0, y, t) = 0,$
 $u'(0, y, t) = \zeta(y, t) - \text{случайная функция}, v'(0, y, t) = 0, \quad (12)$

$0 \leq y \leq H, b' = \text{const} > 0, |\zeta(y, t)| \ll U_\infty$ и т.д.,

на пластине - условия прилипания и непроницаемости

$$y=0, u(x, 0, t) = 0, u'(x, 0, t) = 0$$

$$v(x, 0, t) = 0, v'(x, 0, t) = 0, l \leq x \leq L + l, \quad (13)$$

на выходе потока ставятся «мягкие граничные условия»

$$x = L + 2l, \frac{\partial^2 u(L + 2l, y, t)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u'(L + 2l, y, t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v(L + 2l, y, t)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 v'(L + 2l, y, t)}{\partial x^2} = 0, 0 \leq y \leq H, \quad (14)$$

в верхней части потока условия экстремума

$$y = H, \frac{\partial u(x, H, t)}{\partial y} = 0, \frac{\partial u'(x, H, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v(x, H, t)}{\partial y} = 0, \frac{\partial v'(x, H, t)}{\partial y} = 0, 0 \leq x \leq L + 2l \quad (15)$$

До начала пластины и после пластины ставятся условия симметричного обтекания

$$y = 0, \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0, v(x, 0, t) = 0, \frac{\partial u'(x, 0, t)}{\partial y} = 0, v'(x, 0, t) = 0,$$

$$0 < x < l, L + l < x \leq L + 2l$$

Переход к безразмерным переменным

Для перехода к безразмерным переменным за масштабные величины выбираются: для скоростей U_∞ , для линейных размеров длину пластины L , для времени L/U_∞ , для давления ρU_∞^2 . В безразмерных величинах, $\hat{t} = tU_\infty / L, \hat{x} = x / L, \hat{y} = y / L,$

$\hat{u} = u/U_\infty, \hat{v} = v/U_\infty, \hat{p} = p/(\rho U_\infty^2), Dg = t^\circ U_\infty / L, \hat{F}_x = F_x / g,$
 $\hat{F}_y = F_y / g, Fr = U_\infty^2 / (gL) - \text{число Фруда}, Re = \rho U_\infty L / \mu -$
 число Рейнольдса система (6),(7),(8) (значки опущены) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} - \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
 = \frac{F_x}{Fr} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \\
 = \frac{F_y}{Fr} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

В аналогичную безразмерную форму переходят и уравнения для возмущений (пульсаций) (9),(10),(11):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u'}{\partial x} + v \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = \\
 = \frac{F'_x}{Fr} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + v \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial v}{\partial x} + v' \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial p'}{\partial y} = \\
 = \frac{F'_y}{Fr} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

Граничные условия (12)-(15) переходят к виду:

$$\begin{aligned}
 x=0, u(0, y, t) &= \exp(-b^0 / t), \\
 v(0, y, t) &= 0, 0 \leq y \leq H/L, b^0 = \text{const} > 0; \\
 x=1+2l/L, \frac{\partial^2 u(1+2l/L, y, t)}{\partial x^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 v(1+2l/L, y, t)}{\partial x^2} &= 0, 0 \leq y \leq H/L; \\
 y=0, u(x, 0, t) &= 0, v(x, 0, t) = 0, l/L \leq x \leq 1+l/L; \\
 y=H/L, \frac{\partial u(x, H/L, t)}{\partial y} &= 0, \frac{\partial v(x, H/L, t)}{\partial y} = 0, 0 \leq x \leq 1+2l/L; \\
 y=0, \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} &= 0, v(x, 0, t) = 0, 0 < x < l/L, 1+l/L < x \leq 1+2l/L
 \end{aligned}$$

Аналогичные безразмерные граничные условия имеют место и для пульсационных уравнений.

Начально-краевая задача для (16)-(21) решается теоретически обоснованными разностными методами (Джакупов К.Б. /3/), подробная технология которых излагается ниже.

§2. Технология построения разностных схем уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке. Полуявные разностные схемы Джакупова

Для изложения принципов построения и алгоритма реализации разностных схем для уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке, наиболее подходящим является семейство параметрических полуявных схем из /3/ ($\bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1$), которое излагается на примере уравнений (16), (17), (18) . В безразмерной области $0 \leq x \leq 1+2l/L, 0 \leq y \leq H/L$ вводится сетка

$$\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, \dots, N_x; y_j, j = 0, 1, \dots, N_y\} \text{ и сетка по времени } \Omega_{\tau 0} = \{t_n, n = 0, 1, \dots, N_{\tau}\} \text{ с шагами}$$

$$h_{xi} = x_i - x_{i-1} > 0, i = 1, \dots, N_x, h_{yj} = y_j - y_{j-1} > 0, j = 1, \dots, N_y,$$

$$x_0=0, y_0=0, x_{N_x}=1+2l/L, y_{N_y}=H/L, \tau_n=t_n-t_{n-1}>0, n=1, \dots, N_\tau$$

Шаги сетки около обтекаемой поверхности должны быть порядка $h \approx 1/\sqrt{\text{Re}}$. Используются обозначения сеточных функций:

Вводятся разностные производные:

$$f_x \equiv \frac{f_{i+1j}^n - f_{ij}^n}{h_{xi+1}}, f_{\bar{x}} \equiv \frac{f_{ij}^n - f_{i-1j}^n}{h_{xi}}, f_{\bar{x}} \equiv \frac{f_{i+1j}^n - f_{i-1j}^n}{h_{xi+1} + h_{xi}}.$$

$$f_y \equiv \frac{f_{ij+1}^n - f_{ij}^n}{h_{yj+1}}, f_{\bar{y}} \equiv \frac{f_{ij}^n - f_{ij-1}^n}{h_{yj}}, f_{\bar{y}} \equiv \frac{f_{ij+1}^n - f_{ij-1}^n}{h_{yj+1} + h_{yj}}$$

Применяется монотонная схема, аппроксимирующая конвективные члены с 2 порядком точности (Джакупов К.Б./20). Схема полуявная по времени в силу того, что давление и уравнение неразрывности взяты на верхнем слое времени:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} u_{\bar{x}}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} u_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} u_{\bar{y}}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} u_y^n +$$

$$+ \left\{ (u'^2)_{\bar{x}}^n + (u'v')_{\bar{y}}^n - \frac{Dg}{2} [(u'^2)_{\bar{x}}^n + (u'v')_{\bar{y}}^n - (u'^2)_{\bar{x}}^{n-1} - (u'v')_{\bar{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1} \right\} +$$

$$+ \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} = \frac{F_x}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^y}{h_{xi+1} + h_{xi}} (u_x^n - u_{\bar{x}}^n) + \frac{2\mu_{vyu}^x}{h_{yj+1} + h_{yj}} (u_y^n - u_{\bar{y}}^n), \quad (22)$$

$$\frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} v_{\bar{x}}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} v_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} v_{\bar{y}}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} v_y^n +$$

$$+ \left\{ (u'v')_{\bar{x}}^n + (v'^2)_{\bar{y}}^n - \frac{Dg}{2} [(u'v')_{\bar{x}}^n + (v'^2)_{\bar{y}}^n - (u'v')_{\bar{x}}^{n-1} - (v'^2)_{\bar{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1} \right\} +$$

$$+ \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} = \frac{F_y}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^y}{h_{xi+1} + h_{xi}} (v_x^n - v_{\bar{x}}^n) + \frac{2\mu_{vyu}^x}{h_{yj+1} + h_{yj}} (v_y^n - v_{\bar{y}}^n), \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} = 0, \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y; \quad n = \overline{0, N_\tau}, \quad (24)$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$\begin{aligned} \mu_{uxv}^v &= \left[\frac{1}{\text{Re}} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right] / [1 + \\ &+ \text{Re} \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right)], \\ \mu_{vyu}^u &= \left[\frac{1}{\text{Re}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} \right] / [1 + \\ &+ \text{Re} \left(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1} \right)], \end{aligned}$$

На равномерной сетке $h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j, h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i$ данные коэффициенты упрощаются

$$\begin{aligned} \mu_{uxv}^v &= \left[\frac{1}{\text{Re}} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2} \right] / \left[1 + \text{Re} \left(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2} \right) \right], \\ \mu_{vyu}^u &= \left[\frac{1}{\text{Re}} + \frac{|u_{ij}^n| h_x}{2} \right] / \left[1 + \text{Re} \left(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

При значениях $\mu_{uxv}^v = \frac{1}{\text{Re}}, \mu_{vyu}^u = \frac{1}{\text{Re}}$ схема имеет 1 порядок

точности. Начальные условия задаются на сетке

$$\Omega_h = \{x_i, i = 1, \dots, N_x - 1; y_j, j = 1, \dots, N_y - 1\};$$

$$u_{ij}^0 = 0, v_{ij}^0 = 0, i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1} \quad (25)$$

Краевые условия (18)-(21) задаются в граничных узлах:

$$S_h = \{i = 0, i = N_x, j = \overline{0, N_y}, j = 0, j = N_y, i = \overline{0, N_x}\}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h;$$

$$x = 0, u_{0j}^{n+1} = e^{-\frac{b^0}{t_{n+1}}}, v_{0j}^{n+1} = 0, j = \overline{0, N_y - 1}, \quad (26)$$

$$x = 1 + 2l / L, u_{N_x j}^{n+1} = 2u_{N_x-1 j}^{n+1} - u_{N_x-2 j}^{n+1}, v_{N_x j}^{n+1} = 2v_{N_x-1 j}^{n+1} - v_{N_x-2 j}^{n+1},$$

$$0 \leq j \leq N_y, \quad \text{здесь положено } h_{xN_x} = h_{xN_x-1}, \quad (27)$$

на пластине $u_{i0}^{n+1} = 0, v_{i0}^{n+1} = 0, mk \leq i \leq mkk,$

$$(28)$$

до начала и после конца пластины условие симметрии:

$$y = 0, u_{i0}^{n+1} = (4u_{i1}^{n+1} - u_{i2}^{n+1}) / 3, v_{i0}^{n+1} = 0, \text{здесь } h_{x1} = h_{x2},$$

$$1 \leq i \leq mk - 1, mkk + 1 \leq i \leq N_x,$$

$$y = \frac{H}{L} : u_{iN_y}^{n+1} = (4u_{iN_y-1}^{n+1} - u_{iN_y-2}^{n+1}) / 3, \quad h_{yN_y} = h_{yN_y-1}; \quad (29)$$

$$v_{iN_y}^{n+1} = (4v_{iN_y-1}^{n+1} - v_{iN_y-2}^{n+1}) / 3, i = \overline{0, N_x},$$

Аналогичная схема для пульсационных уравнений имеет вид:

$$\frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} u_{\bar{x}}^m + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} u_x^m + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} u_{\bar{y}}^m + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} u_y^m +$$

$$+ u_{ij}^m u_{\bar{x}}^n + v_{ij}^m u_{\bar{y}}^n + \frac{Dg}{2} [(u^2)_{\bar{x}}^n + (u'v')_{\bar{y}}^n - (u^2)_{\bar{x}}^{n-1} - (u'v')_{\bar{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1} +$$

$$+ \frac{p_{i+1j}^{m+1} - p_{ij}^{m+1}}{h_{xi+1}} = \frac{F'_x}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} (u_x^m - u_{\bar{x}}^m) + \frac{2\mu_{vyu}^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} (u_y^m - u_{\bar{y}}^m),$$

$$\frac{v_{ij}^{m+1} - v_{ij}^m}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} v_{\bar{x}}^m + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} v_x^m + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} v_{\bar{y}}^m + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} v_y^m +$$

$$+ u_{ij}^m v_{\bar{x}}^n + v_{ij}^m v_{\bar{y}}^n + \frac{Dg}{2} [(u'v')_{\bar{x}}^n + (v^2)_{\bar{y}}^n - (u'v')_{\bar{x}}^{n-1} - (v^2)_{\bar{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1} +$$

$$+ \frac{p_{ij+1}^{m+1} - p_{ij}^{m+1}}{h_{yj+1}} = \frac{F'_y}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} (v_x^m - v_{\bar{x}}^m) + \frac{2\mu_{vyu}^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} (v_y^m - v_{\bar{y}}^m),$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\frac{u_{ij}^{m+1} - u_{i-1j}^{m+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{m+1} - v_{ij-1}^{m+1}}{h_{yj}} = 0, \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y; \quad n = \overline{0, N_\tau}$$

§3. Алгоритм реализации полуявной схемы

Алгоритм реализации схемы (22)-(29) значительно упрощается, если ввести обозначения алгебраических сумм конвективных и диссипативных членов в (22),(23):

$$Q_{uij}^n = \left[\frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left(\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right] -$$

$$- \left[\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_{xi}} + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_{xi+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_{yj}} + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_{yj+1}} \right], \quad (30)$$

$$Q_{vij}^n = \left[\frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left(\frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right) + \frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left(\frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) \right] -$$

$$- \left[\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{h_{xi}} + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{h_{xi+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{h_{yj}} + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{h_{yj+1}} \right] \quad (31)$$

Схемы (22),(23) приводятся к стандартной форме

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau_{n+1}} = \bar{Q}_{uij}^n - \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, \quad (32)$$

$$\frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau_{n+1}} = \bar{Q}_{vij}^n - \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}, \quad (33)$$

$$\bar{Q}_{uij}^n = Q_{uij}^n + \frac{F_x}{Fr} - \{ (u'^2)_{\bar{x}}^n + (u'v')_{\bar{y}}^n -$$

$$- \frac{Dg}{2} [(u'^2)_{\bar{x}}^n + (u'v')_{\bar{y}}^n - (u'^2)_{\bar{x}}^{n-1} - (u'v')_{\bar{y}}^{n-1}] / \tau_n \}, \quad (34)$$

$$\bar{Q}_{vij}^n = Q_{vij}^n + \frac{F_y}{Fr} - \{ (u'v')_{\bar{x}}^n + (v'^2)_{\bar{y}}^n -$$

$$-\frac{Dg}{2}[(u'v')_{\tilde{x}}^n + (v'^2)_{\tilde{y}}^n - (u'v')_{\tilde{x}}^{n-1} - (v'^2)_{\tilde{y}}^{n-1}]/\tau_n \quad (35)$$

Обе части (32),(33) умножаются на τ_{n+1} и приводятся к виду

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \tau_{n+1}\overline{Q}_{uij}^n - \tau_{n+1}\frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, \quad (36)$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^n + \tau_{n+1}\overline{Q}_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \quad (37)$$

В (36) и (37) положим, ради краткости,

$$F_{uij}^n = u_{ij}^n + \tau_{n+1}\overline{Q}_{uij}^n, \quad F_{vij}^n = v_{ij}^n + \tau_{n+1}\overline{Q}_{vij}^n, \quad (38)$$

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1}\frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, \quad (39)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \quad (40)$$

Совершенно аналогичные (30) - (40) выражения получаются и для схемы пульсационных уравнений (19), (20), (21):

$$\frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\tau_{n+1}} = \overline{Q}_{uij}^m - \frac{P_{i+1j}^{m+1} - P_{ij}^{m+1}}{h_{xi+1}}, \quad \frac{v_{ij}^{m+1} - v_{ij}^m}{\tau_{n+1}} = \overline{Q}_{vij}^m - \frac{P_{ij+1}^{m+1} - P_{ij}^{m+1}}{h_{yj+1}},$$

$$\overline{Q}_{uij}^m = Q_{uij}^m + \frac{F'_x}{Fr} - u_{ij}^m u_{\tilde{x}}^n - v_{ij}^m u_{\tilde{y}}^n -$$

$$-\frac{Dg}{2}[(u'^2)_{\tilde{x}}^n + (u'v')_{\tilde{y}}^n - (u'^2)_{\tilde{x}}^{n-1} - (u'v')_{\tilde{y}}^{n-1}]/\tau_n,$$

$$\overline{Q}_{vij}^m = Q_{vij}^m + \frac{F'_y}{Fr} - u_{ij}^m v_{\tilde{x}}^n - v_{ij}^m v_{\tilde{y}}^n -$$

$$-\frac{Dg}{2}[(u'v')_{\tilde{x}}^n + (v'^2)_{\tilde{y}}^n - (u'v')_{\tilde{x}}^{n-1} - (v'^2)_{\tilde{y}}^{n-1}]/\tau_n$$

Обозначив $F_{uij}^m = u_{ij}^m + \tau_{n+1}\overline{Q}_{uij}^m$, $F_{vij}^m = v_{ij}^m + \tau_{n+1}\overline{Q}_{vij}^m$, сделаем стандартное представление

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}$$

Имеет место фундаментальный принцип реализации закона сохранения массы через функцию давления. По этому принципу поле давления P_{ij}^{n+1} определяется из требования, чтобы для стоящих в (39) и (40) $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$ выполнялось уравнение неразрывности (24). С этой целью (39),(40) подставляются в (24), в результате получается замкнутая система разностных уравнений для давления P_{ij}^{n+1} .

§4. Технология получения разностных уравнений для давления (поясняется для граничных условий

Дирихле $u|_{\sigma} = \varphi_u(x, y, t), v|_{\sigma} = \varphi_v(x, y, t)$)

Схема 1 ($\bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1/3$) - *разностные производные назад в*

уравнении неразрывности $\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-j}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} = 0$, *разностные*

производные давления вперед в уравнении динамики

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}, v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}$$

I^0 . Подстановка (39) и (40) в (24) в узлах с номерами

$2 \leq i \leq N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 1$ дает систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{xi}} \left\{ \left(F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} \right) - \left(F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij}^{n+1} - P_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ \left(F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} \right) - \left(F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij}^{n+1} - P_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} \right) \right\} = 0, \\ & 2 \leq i \leq N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 1 \end{aligned} \quad (41)$$

2°. Подстановка (39) и (40) в (24) в узлах с индексами $i=1$; $2 \leq j \leq N_y - 1$. В этих узлах уравнение (24) имеет вид:

$$\frac{u_{1j}^{n+1} - u_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \frac{v_{1j}^{n+1} - v_{1j-1}^{n+1}}{h_{yj}} = 0, \quad 2 \leq j \leq N_y - 1, \quad (42)$$

где граничное условие $u_{0j}^{n+1} = \varphi_{u0j}^{n+1}$ задано. После подстановки получается:

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ \left(F_{u1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{2j}^{n+1} - p_{1j}^{n+1}}{h_{x2}} \right) - u_{0j}^{n+1} \right\} + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ \left(F_{v1j}^n - \right. \right. \quad (43)$$

$$\left. \left. - \tau_{n+1} \frac{p_{1j+1}^{n+1} - p_{1j}^{n+1}}{h_{yj+1}} \right) - \left(F_{v1j-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{1j}^{n+1} - p_{1j-1}^{n+1}}{h_{yj}} \right) \right\} = 0, \quad 2 \leq j \leq N_y - 1$$

3°. Аналогичная подстановка (39) и (40) в (24) осуществляется в узлах с индексами $j=1$; $2 \leq i \leq N_x - 1$, где (24) имеет вид

$$\frac{u_{i1}^{n+1} - u_{i-11}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{i1}^{n+1} - v_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} = 0, \quad 2 \leq i \leq N_x - 1, \quad (44)$$

здесь по граничному условию задано $v_{i0}^{n+1} = \varphi_{vi0}^{n+1}$. В результате

$$\frac{1}{h_{xi}} \left\{ \left(F_{ui1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+11}^{n+1} - p_{i1}^{n+1}}{h_{xi+1}} \right) - \left(F_{ui+1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i1}^{n+1} - p_{i-11}^{n+1}}{h_{xi}} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{h_{y1}} \left\{ \left(F_{vi1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i2}^{n+1} - p_{i1}^{n+1}}{h_{y2}} \right) - v_{i0}^{n+1} \right\} = 0, \quad 2 \leq i \leq N_x - 1 \quad (45)$$

4°. Подстановка (39) и (40) в (24) в угловом узле с индексами $i=1$; $j=1$; где (24) имеет вид

$$\frac{u_{11}^{n+1} - u_{01}^{n+1}}{h_{x1}} + \frac{v_{11}^{n+1} - v_{10}^{n+1}}{h_{y1}} = 0,$$

приводит к выражению:

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ \left(F_{u11}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{21}^{n+1} - p_{11}^{n+1}}{h_{x2}} \right) - u_{01}^{n+1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{h_{y1}} \left\{ (F_{v11}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{12}^{n+1} - P_{11}^{n+1}}{h_{y2}}) - v_{10}^{n+1} \right\} = 0 \quad (46)$$

В (41), (43),(45),(46) произведена подстановка во внутренних узлах Ω_h , полученная при этом система линейных уравнений для p_{ij}^{n+1} является незамкнутой. Для замыкания этой системы привлекается уравнение неразрывности (24) в граничных узлах γ_h с индексами $i = N_x, 1 \leq j \leq N_y - 1; j = N_y, 2 \leq i \leq N_x - 1$.

5°. В граничных узлах $i = N_x, 1 \leq j \leq N_y - 1$ уравнение неразрывности (24) имеет вид

$$\frac{u_{N_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1 j}^{n+1}}{h_{x N_x}} + \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x j - 1}^{n+1}}{h_{y j}} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad (47)$$

где по граничным условиям считаются известными

$$u_{N_x j}^{n+1} = \varphi_{u N_x j}^{n+1}, v_{N_x j}^{n+1} = \varphi_{v N_x j}^{n+1}, v_{N_x j - 1}^{n+1} = \varphi_{v N_x j - 1}^{n+1}, j = \overline{0, N_y - 1},$$

следовательно, только (39) подставляется вместо $u_{N_x - 1 j}^{n+1}$.

В результате получается краевое условие для давления на правой границе прямоугольника

$$\frac{1}{h_{x N_x}} \left\{ u_{N_x j}^{n+1} - (F - \tau_{n+1} \frac{P_{N_x j}^{n+1} - P_{N_x - 1 j}^{n+1}}{h_{x N_x}}) \right\} + \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x j - 1}^{n+1}}{h_{y j}} = 0, \quad (48)$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1$$

6°. В граничных узлах $j = N_y, 1 \leq i \leq N_x - 1$ уравнение неразрывности (24) имеет вид

$$\frac{u_{i N_y}^{n+1} - u_{i - 1 N_y}^{n+1}}{h_{x i}} + \frac{v_{i N_y}^{n+1} - v_{i N_y - 1}^{n+1}}{h_{y N_y}} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

где по граничным условиям считаются известными

$$u_{i N_y}^{n+1} = \varphi_{u i N_y}^{n+1}, v_{i N_y}^{n+1} = \varphi_{v i N_y}^{n+1}, u_{i - 1 N_y}^{n+1} = \varphi_{u i - 1 N_y}^{n+1}, i = \overline{0, \dots, N_x},$$

поэтому выражение (40) подставляется вместо $v_{iN_y-1}^{n+1}$. В результате получается краевое условие на верхней границе

$$\frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ v_{iN_y}^{n+1} - (F_{viN_y-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{iN_y}^{n+1} - p_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yj}}) \right\} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1 \quad (49)$$

Разностные уравнения (48) и (49) являются естественными граничными условиями для давления. Система (41),(43),(45), (46),(48),(49) является замкнутой системой, которая решается итерационным методом, для применения которого удобно записать уравнения (41),(43),(45),(46) в виде одной формулы, используя функцию сигнатуры $sign(x)$:

$$\begin{aligned} sign(x) &= 1 \text{ для } x > 0, sign(x) = 0 \text{ для } x = 0, sign(x) = -1 \text{ для } x < 0, \\ &\frac{1}{h_{xi}} \left\{ (F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}) - \frac{1 + sign(i-1.5)}{2} (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - sign(i-1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} + \\ &+ \frac{1}{h_{yj}} \left\{ (F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}) - \frac{1 + sign(j-1.5)}{2} (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - sign(j-1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \right\} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (50) \end{aligned}$$

Система (50) решается относительно p_{ij}^{n+1} при граничных условиях (48),(49).

Схема 2 с разностными производными вперед в уравнении неразрывности ($\bar{\alpha} = 1, \bar{\beta} = 0$ /3/):

$$\frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} = 0, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1 \quad (51)$$

В этом случае градиенты давления в уравнениях (16) и (17), /2/, необходимо аппроксимировать *разностями назад*:

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}, \quad (52)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} \quad (53)$$

В результате аналогичных $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}, 5^{\circ}, 6^{\circ}$ подстановок (52) и (53) в (51) получается система уравнений для давления.

Уравнения для p_{ij}^{n+1} получаются аналогичным способом:

$$\begin{aligned} & \left\{ (F_{ui+1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}) \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} u_{N_x j}^{n+1} - (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}) \right\} \frac{1}{h_{xi+1}} - \\ & - \left\{ \frac{1 + \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} v_{iN_y}^{n+1} + \right. \\ & \left. + (F_{vij+1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}) \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} - \right. \\ & \left. - (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}) \right\} \frac{1}{h_{yj+1}} = 0, \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

граничные условия для давления получаются из (51):

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ (F_{u1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{1j}^{n+1} - p_{0j}^{n+1}}{h_{x1}}) - \varphi_{u0j}^{n+1} \right\} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} = 0,$$

$$i = 0, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ (F_{vi1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i1}^{n+1} - p_{i0}^{n+1}}{h_{y1}}) - \varphi_{vi0}^{n+1} \right\} = 0, j = 0, i = 1, \overline{N_x - 1}$$

**Схема 3 с центральными разностными
производными в уравнении неразрывности**

$$\frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (54)$$

В граничных узлах применяются схемы

$$\frac{u_{1j}^{n+1} - u_{0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{0j}^{n+1} = 0, \quad \frac{u_{N_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1j}^{n+1}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{N_x j}^{n+1} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{v_{i1}^{n+1} - v_{i0}^{n+1}}{h_{y1}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{i0}^{n+1} = 0, \quad \frac{v_{iN_y}^{n+1} - v_{iN_y - 1}^{n+1}}{h_{yN_y}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{iN_y}^{n+1} = 0,$$

по принципу взаимосогласованной аппроксимации /3/ для давления применяются *центральные разности*

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \quad (56)$$

$$v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj+1} + h_{yj}} \quad (57)$$

Уравнения для p_{ij}^{n+1} получаются аналогичным способом:

$$\begin{aligned} & \left\{ (F_{ui+1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+2j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}) \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \\ & + \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} u_{N_x j}^{n+1} - \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{i-2j}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}}) - \\ & \left. - \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} \frac{1}{h_{xi} + h_{xi+1}} + \left\{ \frac{1 + \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} v_{iN_y}^{n+1} + \right. \\ & \left. + (F_{vij+1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+2}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+2} + h_{yj+1}}) \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} - \right. \end{aligned}$$

$$- (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij-2}^{n+1}}{h_{yj} + h_{yj-1}}) \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} -$$

$$- \frac{1 - \text{sign}(j - 1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \left. \vphantom{\frac{1 - \text{sign}(j - 1.5)}{2}} \right\} \frac{1}{h_{yj} + h_{yj+1}} = 0, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

граничные условия для давления получаются из (55):

$$\frac{1}{h_{xN_x}} \left\{ \varphi_{uN_x j}^{n+1} - (F_{uN_x-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{N_x j}^{n+1} - p_{N_x-2j}^{n+1}}{h_{xN_x} + h_{xN_x-1}}) \right\} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} = 0,$$

$$i = N_x, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\frac{1}{h_{x1}} \left\{ (F_{u1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{2j}^{n+1} - p_{0j}^{n+1}}{h_{x2} + h_{x1}}) - \varphi_{u0j}^{n+1} \right\} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} = 0,$$

$$i = 0, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ \varphi_{viN_y}^{n+1} - (F_{viN_y-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{iN_y}^{n+1} - p_{iN_y-2}^{n+1}}{h_{yN_y} + h_{yN_y-1}}) \right\} = 0,$$

$$j = N_y, i = 1, \dots, N_x - 1,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{1}{h_{y1}} \left\{ (F_{vi1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i2}^{n+1} - p_{i0}^{n+1}}{h_{y2} + h_{y1}}) - \varphi_{vi0}^{n+1} \right\} = 0,$$

$$j = 0, i = 1, \dots, N_x - 1$$

§5. Итерационные алгоритмы. Методы глобальных итераций

Решение p_{ij}^{n+1} системы линейных алгебраических уравнений (48), (49), (50) можно найти модифицированным итерационным методом с параметром $\theta > 0$. Для упрощения изложения алгоритма верхний индекс " $n+1$ " у p_{ij}^{n+1} опускается: $p_{ij} = p_{ij}^{n+1}$.

Номер k -итерации обозначается p_{ij}^k . Для сходящегося итерационного процесса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}^k = p_{ij}^{n+1}, \forall (i, j) \quad (58)$$

Нулевая итерация p_{ij}^0 при $k=0$ на каждом слое времени t_{n+1} равно значению давления на предыдущем слое времени t_n :

$$p_{ij}^0 = p_{ij}^n, \quad \forall (i, j) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \frac{1}{h_{xi}} \left\{ \left(F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{ij}^{k+1}}{h_{xi+1}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1 + \text{sign}(i-1.5)}{2} (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{i-1j}^k}{h_{xi}}) - \right. \\ & \left. - \frac{1 - \text{sign}(i-1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} + \frac{1}{h_{yj}} \left\{ \left(F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij}^{k+1}}{h_{yj+1}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1 + \text{sign}(j-1.5)}{2} (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij-1}^k}{h_{yj}}) - \right. \\ & \left. - \frac{1 - \text{sign}(j-1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \right\} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (60) \end{aligned}$$

Итерационный алгоритм для граничного условия (49):

$$\begin{aligned} & \frac{p_{iN_y}^{k+1} - p_{iN_y}^k}{\theta} + \frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{yN_y}} \left\{ v_{iN_y}^{n+1} - (F_{viN_y-1}^n - \right. \\ & \left. - \tau_{n+1} \frac{p_{iN_y}^{k+1} - p_{iN_y-1}^k}{h_{yN_y}}) \right\} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad (61) \end{aligned}$$

где коэффициент при $p_{iN_y}^{k+1}$ равен $1/\theta + A_{iN_y}^n$, $A_{iN_y}^n = \tau_{n+1}/h_{yN_y}^2$.

Итерационный алгоритм для граничного условия (48):

$$\frac{p_{N_x j}^{k+1} - p_{N_x j}^k}{\theta} + \frac{1}{h_{x N_x}} \left\{ (u_{N_x j}^{n+1} - (F_{u_{N_x-1 j}}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{N_x j}^{k+1} - p_{N_x-1 j}^k}{h_{x N_x}})) \right\} + \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x j-1}^{n+1}}{h_{y j}} = 0, 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad (62)$$

где коэффициент при $p_{N_x j}^{k+1}$ равен $1/\theta + A_{N_x j}^n$, $A_{N_x j}^n = \tau_{n+1}/h_{x N_x}^2$.

Здесь $0 < \theta < 1$ – итерационный параметр. В (60) собираются коэффициенты при p_{ij}^{k+1} в виде

$$A_{ij}^n = \tau_{n+1} \left\{ \left[\frac{1}{h_{xi}} \left(\frac{1}{h_{xi+1}} + \frac{1 + \text{sign}(i-1.5)}{2h_{xi}} \right) \right] + \left[\frac{1}{h_{yj}} \left(\frac{1}{h_{yj+1}} + \frac{1 + \text{sign}(j-1.5)}{2h_{yj}} \right) \right] \right\} \quad (63)$$

для явного определения в узлах $1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1$

$$p_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} + A_{ij}^n} \left\langle \frac{p_{ij}^k}{\theta} - \frac{1}{h_{xi}} \left\{ (F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1 j}^k}{h_{xi+1}}) - \frac{1 + \text{sign}(i-1.5)}{2} (F_{ui-1 j}^n + \tau_{n+1} \frac{p_{i-1 j}^k}{h_{xi}}) - \frac{1 - \text{sign}(i-1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \right\} - \frac{1}{h_{yj}} \left\{ (F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k}{h_{yj+1}}) - \frac{1 + \text{sign}(j-1.5)}{2} * \right. \right. \quad (64)$$

$$\left. \left. * (F_{vij-1}^n + \tau_{n+1} [\frac{-p_{ij-1}^k}{h_{yj}}]) - \frac{1 - \text{sign}(j-1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \right\} \right\rangle,$$

Аналогично из (61) и (62) вычисляются

$$p_{iN_y}^{k+1} = \frac{1}{\theta + A_{iN_y}^n} \left\{ \frac{p_{iN_y}^k}{\theta} - \frac{u_{iN_y}^{n+1} - u_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{xi}} - \frac{1}{h_{yN_y}} [v_{iN_y}^{n+1} - (F_{viN_y-1}^n + \tau_{n+1} \frac{p_{iN_y-1}^k}{h_{yN_y}})] \right\},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad (65)$$

$$p_{N_x j}^{k+1} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} + A_{N_x j}^n} \left\{ \frac{p_{N_x j}^k}{\theta} - \frac{1}{h_{xN_x}} [(u_{N_x j}^{n+1} - (F_{uN_x-1}^n + \tau_{n+1} \frac{p_{N_x-1}^k}{h_{xN_x}}))] - \frac{v_{N_x j}^{n+1} - v_{N_x-1}^{n+1}}{h_{yj}} \right\},$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (66)$$

Итерации (64),(65),(66) продолжаются до выполнения с точностью $\varepsilon \approx 0$ уравнения неразрывности (24). Очевидно, уравнения (24) и (50) эквивалентны друг другу в силу представлений (39) и (40), т.е. уравнение (50) тоже есть уравнение неразрывности, только записанное иначе. Данное обстоятельство позволяет значительно упростить процедуру итерационного алгоритма для вычисления p_{ij}^{n+1} . С этой целью (60) с использованием коэффициента A_{ij}^n переписывается в виде

$$(1 + \theta A_{ij}^n) \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \left\{ \frac{1}{h_{xi}} \{ (F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{ij}^k}{h_{xi+1}}) - \right.$$

$$- \frac{1 + \text{sign}(i-1.5)}{2} (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^k - p_{i-1j}^k}{h_{xi}}) - \frac{1 - \text{sign}(i-1.5)}{2} u_{0j}^{n+1} \} +$$

$$+ \frac{1}{h_{yj}} \{ (F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij}^k}{h_{yj+1}}) -$$

$$\left. - \frac{1 + \text{sign}(j-1.5)}{2} (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj}}) - \frac{1 - \text{sign}(j-1.5)}{2} v_{i0}^{n+1} \} \right\} = 0 \quad (67)$$

Метод глобальных итераций для схемы1 (24),(39),(40)

Очевидно, выражение в левой части (67), стоящее в скобках

$\langle \dots \rangle$, совпадает с (50), а (50) совпадает с уравнением неразрывности (24). Исходя из этого, удобно ввести сеточные функции $u_{ij}^{n+1^k}$, $v_{ij}^{n+1^k}$ по аналогии с (39),(40):

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{ij}^k}{h_{xi+1}}, \quad (68)$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij}^k}{h_{yj+1}}, \quad (69)$$

при этом $u_{ij}^{n+1^k}$, $v_{ij}^{n+1^k}$ являются k -итерациями, соответственно u_{ij}^{n+1} , v_{ij}^{n+1} , то есть в пределе имеют место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ij}^{n+1^k} = u_{ij}^{n+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_{ij}^{n+1^k} = v_{ij}^{n+1}$$

так как при сходимости итераций (64),(65),(66)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}^k = p_{ij}^{n+1}, \quad \forall (i, j)$$

В силу указанного выше соответствия выражения в левой части (67), стоящего в скобках $\langle \dots \rangle$ с (50), а (50) с уравнением неразрывности (24), содержимое $\langle \dots \rangle$ в (67) заменяется на итерационное уравнение

$$(1 + \theta A_{ij}^n) \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \frac{u_{ij}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj}} = 0, \quad (70)$$

$$1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y$$

Система (70) эквивалентна (67) и краевым условиям (65) и (66), решается относительно p_{ij}^{k+1} , где по граничным условиям (26),(27),(28),(29):

$$\begin{aligned} x = 0 : u_{0j}^{n+1k} &= e^{\frac{b^o}{t_{n+1}}}, v_{0j}^{n+1k} = 0, j = \overline{0, N_y - 1}, \\ x = 1 + 2l/L, u_{N_x j}^{n+1k} &= 2u_{N_x - 1j}^{n+1k} - u_{N_x - 2j}^{n+1k}, \\ v_{N_x j}^{n+1k} &= 2v_{N_x - 1j}^{n+1k} - v_{N_x - 2j}^{n+1k}, 0 \leq j \leq N_y; \end{aligned} \quad (71)$$

на пластине $y = 0, u_{i0}^{n+1k} = 0, v_{i0}^{n+1k} = 0, mk \leq i \leq mkk$,

до начала и после конца пластины

$$y = 0, u_{i0}^{n+1k} = (4u_{i1}^{n+1k} - u_{i2}^{n+1k})/3, v_{i0}^{n+1k} = 0, 1 \leq i \leq mk - 1, mkk + 1 \leq i \leq N_x,$$

$$y = H/L : u_{iN_y}^{n+1k} = (4u_{iN_y - 1}^{n+1k} - u_{iN_y - 2}^{n+1k})/3,$$

$$v_{iN_y}^{n+1k} = (4v_{iN_y - 1}^{n+1k} - v_{iN_y - 2}^{n+1k})/3, i = \overline{0, N_x}$$

Итерационный процесс (68) - (71-73) абсолютно идентичен (64), (65),(66) и реализуется все вместе до такого значения $k = \bar{k}$, при котором уравнение неразрывности (24) в узлах сетки выполняется с заданной точностью $\varepsilon \approx 0$:

$$\left| \frac{u_{ij}^{n+1\bar{k}} - u_{i-1j}^{n+1\bar{k}}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1\bar{k}} - v_{ij-1}^{n+1\bar{k}}}{h_{yj}} \right| \leq \varepsilon, \forall (i, j) \quad (72)$$

Итерационный процесс реализуется до выполнения критерия (72). Во всех случаях при удовлетворении неравенств (72) за решение на слое времени t_{n+1} берется

$$p_{ij}^{\bar{k}+1} = p_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1\bar{k}} = u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1\bar{k}} = v_{ij}^{n+1}, \forall (i, j).$$

Метод глобальных итераций для схемы 3 (54)-(55)-(56)-(57)

Группируются коэффициенты при p_{ij}^{n+1} :

$$\begin{aligned}
A_{ij}^n &= \tau_{n+1} \left\{ \frac{1}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[\frac{1}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left[\frac{1}{h_{yj+2} + h_{yj+1}} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{h_{yj} + h_{yj-1}} \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} \right] \right\}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1; \\
A_{N_x j}^n &= \tau_{n+1} \frac{1}{h_{xN_x} (h_{xN_x} + h_{xN_x-1})}, A_{0j}^n = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{x1} (h_{x2} + h_{x1})}, j = 1, \dots, N_y - 1; \\
A_{iN_y}^n &= \tau_{n+1} \frac{1}{h_{yN_y} (h_{yN_y} + h_{yN_y-1})}, A_{i0}^n = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{y1} (h_{y2} + h_{y1})}, i = 1, \dots, N_x - 1
\end{aligned}$$

Глобальный итерационный процесс построен так:

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1^k} &= F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{i-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \\
v_{ij}^{n+1^k} &= F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1; \\
(1 + A_{ij}^n \theta) \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj+1} + h_{yj}} &= 0, \\
1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, \\
(1 + A_{N_x j}^n \theta) \frac{p_{N_x j}^{k+1} - p_{N_x j}^k}{\theta} + \frac{\varphi_{uN_x j}^{n+1} - u_{N_x-1j}^{n+1^k}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1} &= 0, \\
(1 + A_{0j}^n \theta) \frac{p_{0j}^{k+1} - p_{0j}^k}{\theta} + \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1} &= 0, 1 \leq j \leq N_y - 1;
\end{aligned}$$

$$(1 + A_{iN_y}^n \theta) \frac{p_{iN_y}^{k+1} - p_{iN_y}^k}{\theta} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{viN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}} = 0,$$

$$(1 + A_{i0}^n \theta) \frac{p_{i0}^{k+1} - p_{i0}^k}{\theta} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}} = 0, 1 \leq i \leq N_x - 1$$

Итерационный процесс останавливается при выполнении условия для уравнения неразрывности

$$\left| \frac{u_{i+1j}^{n+1\bar{k}} - u_{i-1j}^{n+1\bar{k}}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1\bar{k}} - v_{ij-1}^{n+1\bar{k}}}{h_{yj+1} + h_{yj}} \right| \leq \varepsilon, \forall (i, j)$$

После чего последние приближения $p_{ij}^{n+1\bar{k}}, u_{ij}^{n+1\bar{k}}, v_{ij}^{n+1\bar{k}}$ принимаются в качестве решений $p_{ij}^{\bar{k}} \approx p_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1\bar{k}} \approx u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1\bar{k}} \approx v_{ij}^{n+1}$. Итерационный параметр $\theta > 0$ может принимать любое значение из промежутка $0 < \theta \leq 1/2$.

**Глобальные итерации для схемы 1 (24),(39),(40)
по методу минимальных невязок Красносельского
- Крейна**

При вычислении поля давления быструю сходимость итераций обеспечивает метод *Красносельского – Крейна*. Преимущество этого метода перед модифицированным методом заключается в том, что нет необходимости в коэффициентах A_{ij}^n . В областях со сложной геометрией определение A_{ij}^n является трудоемким процессом, что подтверждается присутствием в них выражений вида $\frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2}, \frac{1 - \text{sign}(i + 1.5)}{2}, \dots$, поэтому изложению данного метода здесь уделяется значительное внимание, так как в силу *неоднородности разностных уравнений для дав-*

ления применение других методов, использующих трехточечные прогонки, не представляется возможным.

В методе *Красносельского–Крейна* решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, N,$$

находится по итерационному алгоритму

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \theta_k R_i^k, i = 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, k^*,$$

где R_i^k - вектор невязки k -итерации

$$R_i^k = \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j^k - b_i, i = 1, \dots, N,$$

$\theta_k = \text{const}$ - итерационный параметр, выбирается из условия

минимизации невязки $k+1$ -итерации $\sum_{i=1}^n (R_i^{k+1})^2$ и равно

$$\theta_k = - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} R_j^k \right) R_i^k / \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} R_j^k * \sum_{j=1}^N a_{ij} R_j^k \right)$$

Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\max_{1 \leq i \leq N} |R_i^k| \leq \varepsilon, \text{ где } 0 < \varepsilon - \text{достаточно малое число.}$$

Согласно м.м.н. по (39), (40) вычисляются невязки k -итерации

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{ij}^k}{h_{xi+1}},$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij}^k}{h_{yj+1}}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$R_{ij}^k = \frac{u_{ij}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj}}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

$$R_{N_x j}^k = \frac{\varphi_{u N_x j}^{n+1} - u_{N_x-1 j}^{n+1 k}}{h_{x N_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{N_x j}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$R_{i N_y}^k = \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i N_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{v i N_y}^{n+1} - v_{i N_y-1}^{n+1 k}}{h_{y N_y}}, 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

Благодаря специфике задачи вычисляются соответственно

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{i+1 j}^k - R_{ij}^k}{h_{xi+1}}, \quad R_{vij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij+1}^k - R_{ij}^k}{h_{yj+1}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{uij}^k - R_{ui-1 j}^k}{h_{xi}} + \frac{R_{vij}^k - R_{vij-1}^k}{h_{yj}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$AR_{N_x j}^k = \frac{-R_{u N_x-1 j}^k}{h_{x N_x}}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$AR_{i N_y}^k = \frac{-R_{v i N_y-1}^k}{h_{y N_y}}, 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_k = -\left(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k \right) / \left(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} AR_{ij}^k \right)^2,$$

и далее $p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$|R_{ij}^{\bar{k}}| = \left| \frac{u_{ij}^{n+1 \bar{k}} - u_{i-1 j}^{n+1 \bar{k}}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1 \bar{k}} - v_{ij-1}^{n+1 \bar{k}}}{h_{yj}} \right| \leq \varepsilon, \forall i, j$$

Глобальные итерации для схемы 3 (54)-(55)-(56)-(57) по методу минимальных невязок Красносельского- Крейна
 Согласно м.м.н. по (54)-(55) вычисляются невязки k -итерации

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{i+1j}^k - P_{i-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}},$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{P_{ij+1}^k - P_{ij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1;$$

$$R_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1;$$

$$R_{N_x j}^k = \frac{\varphi_{uN_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1j}^{n+1^k}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{N_x j}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$R_{0j}^k = \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{0j}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$R_{iN_y}^k = \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{iN_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{viN_y}^{n+1} - v_{iN_y - 1}^{n+1, k}}{h_{yN_y}}, 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

$$R_{i0}^k = \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1, k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1$$

Соответственно вычисляются

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{i+1j}^k - R_{i-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \quad R_{vij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij+1}^k - R_{ij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{ui+1j}^k - R_{ui-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{R_{vij+1}^k - R_{vij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$AR_{N_x j}^k = \frac{-R_{uN_x-1j}^k}{h_{xN_x}}, 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad AR_{0j}^k = \frac{R_{u1j}^k}{h_{x1}}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$AR_{iN_y}^k = \frac{-R_{viN_y-1}^k}{h_{yN_y}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad AR_{i0}^k = \frac{R_{vi1}^k}{h_{y1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_k = -\left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k\right) / \left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} AR_{ij}^k\right)^2,$$

и далее $p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$|R_{ij}^{\bar{k}}| = \left| (u_{i+1j}^{n+1\bar{k}} - u_{i-1j}^{n+1\bar{k}}) / (h_{xi+1} + h_{xi}) + (v_{ij+1}^{n+1\bar{k}} - v_{ij-1}^{n+1\bar{k}}) / (h_{yj+1} + h_{yj}) \right| \leq \varepsilon,$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1$$

Методы глобальных итераций для схемы 2 (51),(52),(53)

Идентичны вышеизложенным алгоритмам:

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^k - p_{i-1j}^k}{h_{xi}},$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1;$$

$$A_{ij}^n = \left[\frac{\tau_{n+1}}{h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \frac{\tau_{n+1}}{h_{xi}} \right] \frac{1}{h_{xi+1}} +$$

$$+ \left[\frac{\tau_{n+1}}{h_{yj+1}} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \frac{\tau_{n+1}}{h_{yj}} \right] \frac{1}{h_{yj+1}},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1;$$

$$A_{0j}^n = \frac{\tau_{n+1}}{h_{x1} h_{x1}}, 1 \leq j \leq N_y - 1, A_{i0}^n = \frac{\tau_{n+1}}{h_{y1} h_{y1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1;$$

$$(1 + A_{ij}^n \theta) \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{ij}^{n+1^k}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij}^{n+1^k}}{h_{yj+1}} = 0,$$

$$0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1$$

метод минимальных невязок реализуется так:

$$R_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{ij}^{n+1^k}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij}^{n+1^k}}{h_{yj+1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$R_{0j}^k = \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{0j}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1,$$

$$R_{i0}^k = \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1$$

По специфике задачи вычисляются соответственно

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij}^k - R_{i-1j}^k}{h_{xi}}, R_{vij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij}^k - R_{ij-1}^k}{h_{yj}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{ui+1j}^k - R_{uij}^k}{h_{xi+1}} + \frac{R_{vij+1}^k - R_{vij}^k}{h_{yj+1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1$$

$$AR_{0j}^k = \frac{R_{u1j}^k}{h_{x1}}, 1 \leq j \leq N_y - 1, AR_{i0}^k = \frac{R_{vi1}^k}{h_{y1}}, 1 \leq i \leq N_x - 1,$$

$$\theta_k = - \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k \right) / \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} (AR_{ij}^k)^2 \right),$$

$$p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 1$$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$|R_{ij}^{\bar{k}}| = |(u_{i+1j}^{n+1\bar{k}} - u_{ij}^{n+1\bar{k}}) / h_{xi+1} + (v_{ij}^{n+1\bar{k}} - v_{ij}^{n+1\bar{k}}) / h_{yj+1}| \leq \varepsilon,$$

§ 6. Без «схемной вязкости» аппроксимация конвективных членов

Универсальным является многоточечная аппроксимация конвективного члена, не содержащая «схемной вязкости», (см. Джакупов К.Б. /3/), идея которой заключается в следующем.

Из разложения в ряд Тейлора

$$\Phi_{i-1j}^n = \Phi_{ij}^n - h_{xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ij}^n + \frac{h_{xi}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n + O(h_{xi}^2)$$

вытекает аппроксимация

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ij}^n = \frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n + O(h_{xi}^2)$$

Стоящая здесь 2-я производная аппроксимируется так: в приграничном узле $i = 1$ по формуле

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n = \left(\frac{\Phi_{i+2j}^n - \Phi_{i+1j}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} + O(h_{xi+2} + h_{xi+1}),$$

В остальных узлах $i = 2, \dots, N_x - 1$ по другой формуле

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n = \left(\frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1j}^n - \Phi_{i-2j}^n}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} + O(h_{xi-1} + h_{xi})$$

Данные аппроксимации применяются в случае неотрицательно-го коэффициента $u_{ij}^n \geq 0$. Из аналогичного разложения в ряд

Тейлора
$$\Phi_{i+1j}^n = \Phi_{ij}^n + h_{xi+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ij}^n + \frac{h_{xi+1}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n + O(h_{xi+1}^2)$$

получается

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ij}^n = \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{ij}^n + O(h_{xi+1}^2)$$

Стоящая здесь 2-я производная аппроксимируется так: в узлах $i = 1, \dots, N_x - 2$ по формуле

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{ij}^n = \left(\frac{\Phi_{i+2j}^n - \Phi_{i+1j}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}}\right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} + O(h_{xi+2} + h_{xi+1}),$$

в приграничном узле $i = N_x - 1$ по другой формуле

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{ij}^n = \left(\frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1j}^n - \Phi_{i-2j}^n}{h_{xi-1}}\right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} + O(h_{xi-1} + h_{xi})$$

Эти аппроксимации применяются в случае неположительного коэффициента $u_{ij}^n \leq 0$. Дискретная функция *sign*:

для $A < 0, \text{sign}A = -1$, для $A = 0, \text{sign}A = 0$, для $A > 0, \text{sign}A = +1$

позволяет написать аппроксимации, не содержащие «схемной вязкости», в виде единой формулы

$$\begin{aligned} u_{ij}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{ij}^n &= \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \left\{ \frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} + \right. \\ &+ \frac{h_{xi}}{2} \left[\left(\frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1j}^n - \Phi_{i-2j}^n}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} + \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\Phi_{i+2j}^n - \Phi_{i+1j}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - 1.5)}{2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \left\{ \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \right. \\ &- \frac{h_{xi+1}}{2} \left[\left(\frac{\Phi_{i+2j}^n - \Phi_{i+1j}^n}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi_{i+1j}^n - \Phi_{ij}^n}{h_{xi+1}} \right) \frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\Phi_{ij}^n - \Phi_{i-1j}^n}{h_{xi}} - \frac{\Phi_{i-1j}^n - \Phi_{i-2j}^n}{h_{xi-1}} \right) \frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} \right] \right\} + O(h_{xi}^2) \equiv \\ &\equiv \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} \Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \Phi_{x^0}^n + O(h_{xi}^2) \end{aligned} \quad (73)$$

Аналогичная аппроксимация 2-го порядка точности применяется и для других конвективных членов.

Условия сходимости и устойчивости явной схемы накладывают ограничения на шаги по времени в следующем виде

$$[1 - \tau_{n+1} (\frac{2}{\text{Re} h_x^2} + \frac{3|u_{ji}^n|}{2h_x} + \frac{2}{\text{Re} h_y^2} + \frac{3|v_{ji}^n|}{2h_y})] \geq 0, h_x = \min_i h_{xi}, h_y = \min_j h_{yj},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau - 1$$

В алгоритмах реализаций вышеприведенных полуявных схем в случае аппроксимаций конвективных членов без «схемной вязкости» изменится лишь форма Q_{uij}^n, Q_{vij}^n , входящих в F_{uij}^n, F_{vij}^n :

$$Q_{uij}^n = \frac{1}{\text{Re} \tilde{h}_{xi}} \left[\frac{1}{h_{xi+1}} (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) - \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right] + \frac{1}{\tilde{h}_{yj}} \left(\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) -$$

$$- \left\{ \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} u_{x^0}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} u_{x^0}^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} u_{y^0}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} u_{y^0}^n \right\},$$

$$Q_{vij}^n = \frac{1}{\text{Re} \tilde{h}_{xi}} \left[\frac{1}{h_{xi+1}} (v_{i+1j}^n - v_{ij}^n) - \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{h_{xi}} \right] + \frac{1}{\tilde{h}_{yj}} \left(\frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{h_{yj}} \right) -$$

$$- \left\{ \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} v_{x^0}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} v_{x^0}^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} v_{y^0}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} v_{y^0}^n \right\}$$

§7. Полуявная схема решения трехмерных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости

Для трехмерных уравнений, предложенных в /2/ для моделирования как ламинарных ($k=0$) так и турбулентных течений ($k \neq 0$) несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) -$$

$$- k \frac{\partial}{\partial y} \left[u(u^2 + w^2)^{-0,5} \left(p - \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - k \frac{\partial}{\partial z} \left[u(u^2 + v^2)^{-0,5} \left(p - \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho F_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \\ &- k \frac{\partial}{\partial x} \left[v(v^2 + w^2)^{-0.5} \left(p - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - k \frac{\partial}{\partial z} \left[v(u^2 + v^2)^{-0.5} \left(p - \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{dw}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho F_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ &- k \frac{\partial}{\partial x} \left[w(v^2 + w^2)^{-0.5} \left(p - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - k \frac{\partial}{\partial y} \left[w(u^2 + w^2)^{-0.5} \left(p - \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

при предельных условиях

$$u|_{t=0} = d_u(x, y, z), v|_{t=0} = d_v(x, y, z), w|_{t=0} = \varphi_w(x, y, z),$$

$$u|_S = \varphi_u(x, y, z, t), v|_S = \varphi_v(x, y, z, t), w|_S = \varphi_w(x, y, z, t)$$

легко обобщаются приведенные выше схемы и методы глобальных итераций. По аналогии с направлениями x, y введем узлы по оси z :

$$z_m, m = 0, 1, \dots, N_z, h_{zm} = z_m - z_{m-1}, m = 1, \dots, N_z, f(x_i, y_j, z_m, t_n) \equiv f_{ijm}^n,$$

$$\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N_x, y_j, j = 0, 1, \dots, N_y, z_m, m = 0, 1, \dots, N_z\},$$

$$\Omega_h = \{x_i, i = 1, \dots, N_x - 1, y_j, j = 1, \dots, N_y - 1, z_m, m = 1, \dots, N_z - 1\}.$$

Конвективные члены в общем случае пусть будут аппроксимированы по универсальной формуле типа (73), т.е. без «схемной вязкости» и в качестве образца возьмем двумерную схему (56)-(57). Введем краткое обозначение коэффициента при P_{ijm}^{n+1} в схеме с центральными разностями для градиента давления и уравнения неразрывности:

$$A_{ijm} = \tau_{n+1} \left\{ \frac{1}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[\frac{1}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_{xi} + h_{xi-1}} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \Big] + \\
& + \frac{1}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left[\frac{1}{h_{yj+2} + h_{yj+1}} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{h_{yj} + h_{yj-1}} \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} \right] + \\
& + \frac{1}{h_{zm+1} + h_{zm}} \left[\frac{1}{h_{zm+2} + h_{zm+1}} \frac{1 - \text{sign}(m - N_z + 1.5)}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{h_{zm} + h_{zm-1}} \frac{1 + \text{sign}(m - 1.5)}{2} \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$A_{N_x j m} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{xN_x} (h_{xN_x} + h_{xN_x-1})},$$

$$A_{i0m} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{x1} (h_{x2} + h_{x1})}, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$A_{iN_y m} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{yN_y} (h_{yN_y} + h_{yN_y-1})},$$

$$A_{i0m} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{y1} (h_{y2} + h_{y1})}, i = 1, \dots, N_x - 1, m = 1, \dots, N_z - 1,$$

$$A_{ijN_z} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{zN_z} (h_{zN_z} + h_{zN_z-1})},$$

$$A_{ij0} = \tau_{n+1} \frac{1}{h_{z1} (h_{z2} + h_{z1})}, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1,$$

Глобальный итерационный процесс для вычисления давления построен так:

$$\begin{aligned}
u_{ijm}^{n+1^S} = & F_{uijm}^n - \tau_{n+1} \left\{ \frac{p_{i+1jm}^S - p_{i-1jm}^S}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{k}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left[u_{ij+1m}^n (u_{ij+1m}^{n2} + \right. \right. \\
& + w_{ij+1m}^{n2})^{-0,5} p_{ij+1m}^S - u_{ij-1m}^n (u_{ij-1m}^{n2} + w_{ij-1m}^{n2})^{-0,5} p_{ij-1m}^S \left. \right] + \\
& + k \left[u_{ijm+1}^n (u_{ijm+1}^{n2} + v_{ijm+1}^{n2})^{-0,5} p_{ijm+1}^S - \right. \\
& \left. - u_{ijm-1}^n (u_{ijm-1}^{n2} + v_{ijm-1}^{n2})^{-0,5} p_{ijm-1}^S \right] / (h_{zm+1} + h_{zm}) \left. \right\}, \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{ijm}^{n+1^S} = & F_{vijm}^n - \tau_{n+1} \left\{ \frac{p_{ij+1m}^S - p_{ij-1m}^S}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{k}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[v_{i+1jm}^n (v_{i+1jm}^{n2} + \right. \right. \\
& + w_{i+1jm}^{n2})^{-0,5} p_{i+1jm}^S - v_{i-1jm}^n (v_{i-1jm}^{n2} + w_{i-1jm}^{n2})^{-0,5} p_{i-1jm}^S \left. \right] + \\
& + k \left[v_{ijm+1}^n (u_{ijm+1}^{n2} + v_{ijm+1}^{n2})^{-0,5} p_{ijm+1}^S - \right. \\
& \left. - v_{ijm-1}^n (u_{ijm-1}^{n2} + v_{ijm-1}^{n2})^{-0,5} p_{ijm-1}^S \right] / (h_{zm+1} + h_{zm}) \left. \right\}, \quad (75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{ijm}^{n+1^S} = & F_{wijm}^n - \tau_{n+1} \left\{ \frac{p_{ijm+1}^S - p_{ijm-1}^S}{h_{zm+1} + h_{zm}} + \frac{k}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[w_{i+1jm}^n (v_{i+1jm}^{n2} + \right. \right. \\
& + w_{i+1jm}^{n2})^{-0,5} p_{i+1jm}^S - w_{i-1jm}^n (v_{i-1jm}^{n2} + w_{i-1jm}^{n2})^{-0,5} p_{i-1jm}^S \left. \right] + \\
& + k \left[w_{ij+1m}^n (u_{ij+1m}^{n2} + w_{ij+1m}^{n2})^{-0,5} p_{ij+1m}^S - \right. \\
& \left. - w_{ij-1m}^n (u_{ij-1m}^{n2} + w_{ij-1m}^{n2})^{-0,5} p_{ij-1m}^S \right] / (h_{yj+1} + h_{yj}) \left. \right\}, \quad (76)
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$\begin{aligned}
& (1 + A_{ijm} \theta) \frac{p_{ijm}^{s+1} - p_{ijm}^s}{\theta} + \frac{u_{i+1jm}^{n+1^S} - u_{i-1jm}^{n+1^S}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \\
& + \frac{v_{ij+1m}^{n+1^S} - v_{ij-1m}^{n+1^S}}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1^S} - w_{ijm-1}^{n+1^S}}{h_{zm+1} + h_{zm}} = 0,
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$(1 + A_{N_x j m} \theta) \frac{P_{N_x j m}^{s+1} - P_{N_x j m}^s}{\theta} + \frac{\varphi_{u N_x j m}^{n+1} - u_{N_x-1 j m}^{n+1 S}}{h_{x N_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{N_x j m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right)_{N_x j m}^{n+1} = 0,$$

$$(1 + A_{0 j m} \theta) \frac{P_{0 j m}^{s+1} - P_{0 j m}^s}{\theta} + \frac{u_{1 j m}^{n+1 S} - \varphi_{u 0 j m}^{n+1}}{h_{x 1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{0 j m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right)_{0 j m}^{n+1} = 0,$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1;$$

$$(1 + A_{i N_y m} \theta) \frac{P_{i N_y m}^{s+1} - P_{i N_y m}^s}{\theta} + \frac{\varphi_{v i N_y m}^{n+1} - v_{i N_y-1 m}^{n+1 S}}{h_{y N_y}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i N_y m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right)_{i N_y m}^{n+1} = 0,$$

$$(1 + A_{i 0 m} \theta) \frac{P_{i 0 m}^{s+1} - P_{i 0 m}^s}{\theta} + \frac{v_{i l m}^{n+1 S} - \varphi_{v i 0 m}^{n+1}}{h_{y 1}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i 0 m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right)_{i 0 m}^{n+1} = 0,$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1;$$

$$(1 + A_{i j N_z} \theta) \frac{P_{i j N_z}^{s+1} - P_{i j N_z}^s}{\theta} + \frac{\varphi_{w i j N_z}^{n+1} - w_{i j N_z-1}^{n+1 S}}{h_{z N_z}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i j N_z}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{i j N_z}^{n+1} = 0,$$

$$(1 + A_{i j 0} \theta) \frac{P_{i j 0}^{s+1} - P_{i j 0}^s}{\theta} + \frac{w_{i j 1}^{n+1 S} - \varphi_{w i j 0}^{n+1}}{h_{z 1}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right)_{i j 0}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \right)_{i j 0}^{n+1} = 0,$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1;$$

Глобальные итерации нахождения давления по методу минимальных невязок Красносельского - Крейна

По уравнениям (74) - (75) - (76) вычисляются 3 компоненты

$u_{ijm}^{n+1^S}$, $v_{ijm}^{n+1^S}$, $w_{ijm}^{n+1^S}$, после чего невязки s -итерации:

$$R_{ijm}^s = \frac{u_{i+1jm}^{n+1^S} - u_{i-1jm}^{n+1^S}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1^S} - v_{ij-1m}^{n+1^S}}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1^S} - w_{ijm-1}^{n+1^S}}{h_{zm+1} + h_{zm}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$R_{N_x jm}^s = \frac{\varphi_{uN_x jm}^{n+1} - u_{N_x-1 jm}^{n+1S}}{h_{xN_x}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{N_x jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\right)_{N_x jm}^{n+1}$$

$$R_{0jm}^s = \frac{u_{1jm}^{n+1S} - \varphi_{u0jm}^{n+1}}{h_{x1}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{0jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\right)_{0jm}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1;$$

$$R_{iN_y m}^s = \frac{\varphi_{viN_y m}^{n+1} - v_{iN_y-1m}^{n+1S}}{h_{yN_y}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{iN_y m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial z}\right)_{iN_y m}^{n+1} = 0,$$

$$R_{i0m}^s = \frac{v_{i1m}^{n+1S} - \varphi_{vi0m}^{n+1}}{h_{y1}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{i0m}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial z}\right)_{i0m}^{n+1} = 0, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1;$$

$$R_{ijN_z}^s = \frac{\varphi_{wijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1S}}{h_{zN_z}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{ijN_z}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{ijN_z}^{n+1},$$

$$R_{ij0}^s = \frac{w_{ij1}^{n+1S} - \varphi_{wij0}^{n+1}}{h_{z1}} + \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}\right)_{ij0}^{n+1} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}\right)_{ij0}^{n+1}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1$$

Благодаря специфике задачи вычисляются соответственно

$$\begin{aligned} R_{uijm}^s = & -\tau_{n+1} \left\{ \frac{R_{i+1jm}^s - R_{i-1jm}^s}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{k}{h_{yj+1} + h_{yj}} [u_{ij+1m}^n (u_{ij+1m}^{n2} + \right. \\ & \left. + w_{ij+1m}^{n2})^{-0,5} R_{ij+1m}^s - u_{ij-1m}^n (u_{ij-1m}^{n2} + w_{ij-1m}^{n2})^{-0,5} R_{ij-1m}^s] + \right. \\ & \left. + \frac{k}{h_{zm+1} + h_{zm}} [u_{ijm+1}^n (u_{ijm+1}^{n2} + v_{ijm+1}^{n2})^{-0,5} R_{ijm+1}^s - \right. \\ & \left. - u_{ijm-1}^n (u_{ijm-1}^{n2} + v_{ijm-1}^{n2})^{-0,5} R_{ijm-1}^s] \right\}, \end{aligned}$$

$$R_{vijm}^s = -\tau_{n+1} \left\{ \frac{R_{ij+1m}^s - R_{ij-1m}^s}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{k}{h_{xi+1} + h_{xi}} [v_{i+1jm}^n (v_{i+1jm}^{n2} + w_{i+1jm}^{n2})^{-0,5} R_{i+1jm}^s - v_{i-1jm}^n (v_{i-1jm}^{n2} + w_{i-1jm}^{n2})^{-0,5} R_{i-1jm}^s] + \frac{k}{h_{zm+1} + h_{zm}} [v_{ijm+1}^n (u_{ijm+1}^{n2} + v_{ijm+1}^{n2})^{-0,5} R_{ijm+1}^s - v_{ijm-1}^n (u_{ijm-1}^{n2} + v_{ijm-1}^{n2})^{-0,5} R_{ijm-1}^s] \right\},$$

$$R_{wijm}^s = -\tau_{n+1} \left\{ \frac{R_{ijm+1}^s - R_{ijm-1}^s}{h_{zm+1} + h_{zm}} + \frac{k}{h_{xi+1} + h_{xi}} [w_{i+1jm}^n (v_{i+1jm}^{n2} + w_{i+1jm}^{n2})^{-0,5} R_{i+1jm}^s - w_{i-1jm}^n (v_{i-1jm}^{n2} + w_{i-1jm}^{n2})^{-0,5} R_{i-1jm}^s] + \frac{k}{h_{yj+1} + h_{yj}} [w_{ij+1m}^n (u_{ij+1m}^{n2} + w_{ij+1m}^{n2})^{-0,5} R_{ij+1m}^s - w_{ij-1m}^n (u_{ij-1m}^{n2} + w_{ij-1m}^{n2})^{-0,5} R_{ij-1m}^s] \right\},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ijm}^s = \frac{R_{ui+1jm}^s - R_{ui-1jm}^s}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{R_{vij+1m}^s - R_{vij-1m}^s}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{R_{wijm+1}^s - R_{wijm-1}^s}{h_{zm+1} + h_{zm}},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$AR_{N_x jm}^s = \frac{-R_{uN_x-1jm}^s}{h_{xN_x}}, AR_{0jm}^s = \frac{R_{u1jm}^s}{h_{x1}}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_m - 1;$$

$$AR_{i0m}^s = \frac{R_{vil m}^s}{h_{y1}}, AR_{iN_y m}^s = \frac{-R_{viN_y-1m}^s}{h_{yN_y}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_m - 1,$$

$$AR_{ij0}^s = \frac{R_{wij1}^s}{h_{z1}}, AR_{ijN_z}^s = \frac{-R_{wijN_z-1}^s}{h_{zN_z}}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_s = -\left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{m=0}^{N_z} AR_{ijm}^s \cdot R_{ijm}^s\right) / \left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{m=0}^{N_z} AR_{ijm}^s\right)^2, \text{ и далее}$$

$$P_{ijm}^{s+1} = P_{ijm}^s + \theta_s R_{ijm}^s, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, k = 0, \dots, N_z$$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$|R_{ijm}^s| \leq \varepsilon, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, m = 0, \dots, N_z$$

Последние приближения $P_{ijm}^{s*}, U_{ijm}^{n+1s*}, V_{ijm}^{n+1s*}, W_{ijm}^{n+1s*}$ принимаются в качестве решений

$$P_{ijm}^{s*} \approx P_{ijm}^{n+1}, U_{ijm}^{n+1s*} \approx U_{ijm}^{n+1}, V_{ijm}^{n+1s*} \approx V_{ijm}^{n+1}, W_{ijm}^{n+1s*} \approx W_{ijm}^{n+1}$$

Разностные аппроксимации выражений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right), k \frac{\partial}{\partial y} \left[u(u^2 + w^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right],$$

$$k \frac{\partial}{\partial z} \left[u(u^2 + v^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial w}{\partial z}\right], \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left[v(v^2 + w^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right], k \frac{\partial}{\partial z} \left[v(u^2 + v^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial w}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left[w(v^2 + w^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right], k \frac{\partial}{\partial y} \left[w(u^2 + w^2)^{-0.5} \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right],$$

включаются соответствующим образом в $F_{u_{ijm}}^n, F_{v_{ijm}}^n, F_{w_{ijm}}^n$, желательнo аппроксимировать их по образцам (см./2/):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{ijm}^n &= \frac{2}{h_{xi+1} + h_{xi}} \left[\frac{(\lambda_{i+1jm}^n + \lambda_{ijm}^n)(\Phi_{i+1jm}^n - \Phi_{ijm}^n)}{2h_{xi+1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\lambda_{ijm}^n + \lambda_{i-1jm}^n)(\Phi_{ijm}^n - \Phi_{i-1jm}^n)}{2h_{xi}} \right] + O(h_{xi+1} - h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{ijm}^n &= \frac{2}{h_{yj+1} + h_{yj}} \left[\frac{(\lambda_{ij+1m}^n + \lambda_{ijm}^n)(\Phi_{ij+1m}^n - \Phi_{ijm}^n)}{2h_{yj+1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\lambda_{ijm}^n + \lambda_{ij-1m}^n)(\Phi_{ijm}^n - \Phi_{ij-1m}^n)}{2h_{yj}} \right] + O(h_{yj+1} - h_{yj}) + O(\hbar_{yj}^2), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{ijm}^n &= \frac{2}{h_{zm+1} + h_{zm}} \left[\frac{(\lambda_{ijm+1}^n + \lambda_{ijm}^n)(\Phi_{ijm+1}^n - \Phi_{ijm}^n)}{2h_{zm+1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\lambda_{ijm}^n + \lambda_{ijm-1}^n)(\Phi_{ijm}^n - \Phi_{ijm-1}^n)}{2h_{zm}} \right] + O(h_{zm+1} - h_{zm}) + O(\hbar_{zm}^2) \end{aligned}$$

Данные аппроксимации пригодны и для разрывных коэффициентов /5/.

Замечание. Обобщение изложенных итерационных алгоритмов на трехмерные задачи в цилиндрических, сферических и др. системах координат не вызывает особых затруднений и производится аналогично вышеизложенному (см./1/).

§8. Программа на TURBO-PASCAL

Основные этапы программирования схемы пункта /1/.

1*. Описания массивов:

$$\begin{aligned} u_{ij}^n &\equiv UN[i, j], u_{ij}^{n+1} \equiv UN1[i, j], v_{ij}^n \equiv VN[i, j], v_{ij}^{n+1} \equiv VN1[i, j], \\ p_{ij}^n &\equiv PN[i, j], p_{ij}^{n+1} \equiv PM[i, j], p_{ij}^k \equiv PK[i, j], p_{ij}^{k+1} \equiv PK1[i, j], \\ h_{xi} &\equiv HX[i], h_{yj} \equiv HY[j], A_{ij}^n \equiv AN[i, j]. \end{aligned}$$

2*. Задание параметров сетки $N_x, N_y, h_{xi}, i=1, \dots, N_x, h_{yj}, j=1, \dots, N_y,$

τ_{n+1} , входящих в уравнения констант Re, k, b^0, L, H . При расчете

течений для $Re \gg 1$ необходимо применять неравномерные сетки, например, для каверны:

$$h_{x1}=h_{x2}=1/Re^+, \quad h_{x3}=2/Re^+, \quad h_{xNx}=h_{xNx-1}=1/Re^+, \quad h_{xNx-2}=2/Re^+, \\ h_{xi}=(1-(h_{xi}+h_{xi+1}+h_{xi+2}+h_{xiNx}+h_{xiNx-1}+h_{xiNx-2}))/N_x-6, \quad 4 \leq i \leq N_x-3; \\ h_{y1}=h_{y2}=1/Re^+, \quad h_{y3}=2/Re^+, \quad h_{yNi}=h_{yNy-1}=1/Re^+, \\ h_{yNy-2}=2/Re^+, \quad h_{yj}=(H/L-(h_{y1}+h_{y2}+h_{y3}+h_{yNy}+h_{yNy-1}+h_{yNy-2}))/N_y-6, \\ 4 \leq j \leq N_y-3, \quad Re^+ = \gamma \sqrt{Re}, \quad 0 < \gamma < 1; \quad \text{при небольших } Re \\ \text{равномерную сетку } h_{xi}=1/N_x, \quad i=1, \dots, N_x, \quad h_{yj}=(H/L)/N_y.$$

3*. Задание начальных условий (25) в цикле по i, j .

4*. Задание во внешнем (глобальном) цикле по времени

$$t_{n+1} = \sum_{m=0}^n \tau_{m+1} \text{ краевых условий (26),(27),(28),(29) и вычисление}$$

в цикле по i, j $\overline{Q}_{uij}^n, \overline{Q}_{vij}^n, F_{uij}^n, F_{vij}^n$.

5*. Программирование итерационного алгоритма (71),(72), (73),(74),(75),(76),(77).

6*. Засылка насчитанных полей

$$p_{ij}^{\bar{k}+1} = p_{ij}^{n+1}, \quad u_{ij}^{n+1\bar{k}} = u_{ij}^{n+1}, \quad v_{ij}^{n+1\bar{k}} = v_{ij}^{n+1}, \quad \forall (i, j).$$

**Программа расчета методом глобальной итерации
продольного обтекания пластины с выступом
вязкой несжимаемой жидкостью при**

$$H/L=8/\sqrt{Re}$$

PROGRAM plastina;

USES crt; CONST NX=140; NY=40;nx1=40;nx2=50;ny1=10;k=0;
RE=40000 ; {при моделировании турбулентного режима k#0,
выбирается экспериментированием}

LABEL met, metk,met2,met4,met6,mettt,METPSI,MMM,SSS,TTT ;

VAR out1, out2, out3: text;

UN,UN1,UK,VN,VN1,VK,PK,PK1,PN,PN1,AN,FUN, FVN,PSI:
array[0..NX,0..NY] of real;

HX: array[0..NX] of real; HY: array[0..NY] of real;

KJ, i, j, KK, n, MK: integer; NN: real;

HK, AM,AX, EPSILON, T, QNUij, QNVij, TAY, S, TET,

```

B0, HL, AMAX, UMAX, VMAX, PMAX, AU, AV, konu, konv,
unn, aunnn, vnn, avnn: real;
begin
assign(out1, 'ainur1.pas'); assign(out2, 'ainur2.pas');
rewrite(out1); rewrite(out2);
    TET:=0.01; B0:=0.1; HL:=8/SQRT(Re); EPSILON:=0.05;
NN:=1; MK:=5; Writeln('hx[i] ');
for i:=1to NX do begin HX[i]:=1./(NX-2*MK); Writeln('i= ', i,
HX[i]:9:4);end; Writeln('hy[j] ');
for j:=1 to NY do begin HY[j]:=HL/NY; Writeln('j= ', j, HY[j]:9:4);
end;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin UN[i,j]:=0; VN[i,j]:=0;
PN[i,j]:=0;
UN1[i,j]:= UN[i,j]; VN1[i,j]:= VN[i,j]; PN1[i,j]:=0; UK[i,j]:=0;
VK[i,j]:=0; PK[i,j]:=0; PK1[i,j]:=0;
end; TAY:= 0.001;
n:=0; t:=0;met: n:=n+1; t:=(n+1)*TAY;
for j:=0 to NY do begin UN1[0,j]:=exp(-B0/t); VN1[0,j]:=0;
UK[0,j]:= UN1[0,j]; VK[0,j]:=0; VN[0,j]:=0end;for i:=0 to NX do
begin VN1[i,0]:=0; VK[i,0]:=0;end;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1 do begin
if(i>=nx1.and.i<=nx2.and.j<=ny1) goto MMM;unn:= UN[i,j];
vnn:=VN[i,j];aunnn:=ABS(unn); avnn:=ABS(vnn);
konu:= ( aunnn+unn)/2*( unnn- UN[i-1,j])/ HX[i]+(unn-
aunnn)/2*(UN[i+1,j]- unn)/HX[i+1]
+(avnn+vnn)/2*(unn- UN[i,j-1])/ Hy[j]+(vnn-avnn)/2*( UN[i,j+1]-
unn)/ Hy[j+1];
QNUij:=1/RE*(2/(HX[i+1]+HX[i])*((UN[i+1,j]-unn)/HX[i+1]-
unn- UN[i-1,j])/ HX[i])+
2/(Hy[j+1]+Hy[j])*((UN[i,j+1]-unn)/Hy[j+1]-
(unn-UN[i,j-1])/
Hy[j])-k*((VN[i,j+1]-vnn)/Hy[j+1]-
(vnn-VN[i,j-1])/Hy[j])/
(0.5*(Hy[j+1]+Hy[j]))) - konu;
konv:= ( aunnn+unn)/2*( vnn-VN[i-1,j])/ HX[i]+(unn-
aunnn)/2*(VN[i+1,j]- vnn)/HX[i+1]
+(avnn+vnn)/2*(vnn- VN[i,j-1])/ Hy[j]+(vnn-avnn)/2*( VN[i,j+1]-
vnn)/ Hy[j+1];
QNVij:=1/RE*(2/(HX[i+1]+HX[i])*((VN[i+1,j]-vnn)/HX[i+1]-
(vnn- VN[i-1,j])/ HX[i])+

```

```

2/(Hy[j+1]+Hy[j])*(( VN[i,j+1]-vnn)/Hy[j+1]-(vnn-VN[i,j-1])/
Hy[j])-k*((UN[i+1,j]- unn)/HX[i+1]-( unn- UN[i-1,j])/ HX[i])/
(0.5*(HX[i+1]+HX[i])))-konv;
FUN[i,j]:=unn+TAY*QNUij;
FVN[i,j]:=vnn+TAY*QNVij;MMM:end;
if n>1 then goto mettt;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin
AN[i,j]:=TAY/HX[i+1]*(1/HX[i]+(1-(i-NX+1.5)/ABS(i-
NX+1.5)))/(2*HX(i+1))+
TAY/HY[j+1]*(1/HY[j]+(1-(j-NY+1.5)/ABS(j-
NY+1.5)))/(2*HY(j+1));end;
for i:=1 to NX-1 do begin AN[i, 0]:= TAY/HY[1]/ HY[1]; end;
for j:=1 to NY -1do begin AN[0,j]:=TAY/HX[1]/ HX[1]; end;mettt:
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do
begin PK[i,j]:=PN[i,j]; end;
KK:=0; metk: KK:=KK+1
for j:=0 to NY do begin UK[0,j]:= UN[0,j]; VK[0,j]:=0; end;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin
if(i>=nx1.and.i<=nx2.and.j<=ny1) goto SSS;UK[i,j]:= FUN[i,j]-
TAY*((PK[i,j]-PK[i-1,j])/HX[i]+k*(PK[i,j]-PK[i,j-1])/HY[j]);
VK[i,j]:= FVN[i,j]-TAY*((PK[i,j]-PK[i,j-1])/HY[j]+k*(PK[i,j]-
PK[i-1,j])/HX[i]); SSS:end;
AMAX:=0;
for i:=0 to NX-1 do for j:=0 to NY -1do begin
if(i>=nx1.and.i<=nx2.and.j<=ny1) goto TTT;S:=(UK[i+1,j]-
UK[i,j])/HX[i+1]+ (VK[i,j+1]- VK[i,j])/HY[j+1]; PK1[i,j]:= PK[i,j]-
TET*S/(1+TET*AN[i,j]);
if ABS(S)>AMAX then
AMAX:=ABS(S); TTT:end;
for j:=1 to NY do begin
UK[NX,j]:=2* UK[NX-1,j]- UK[NX-2,j];
VK[NX,j]:=2* VK[NX-1,j]- VK[NX-2,j];end;
for j:=0 to NY do begin
PK1[NX,j]:= 2* PK1[NX-1,j]- PK1[NX-2,j];end; for i:=1 to NX do
begin
if i<MK then UK[I,0]:=(4* UK[I,1]- UK[I,2])/3) ;
if i>(NX-MK) then UK[I,0]:=(4* UK[I,1]- UK[I,2])/3) ;

```

```

UK[I,NY]:=(4* UK[I,NY-1]- UK[I,NY-2])/3;
VK[I,NY]:=(4* VK[I,NY-1]- VK[I,NY-2])/3;End;
For i:=0 to NX do begin
PK1[I,NY]:=(PK[I,NY]/TET+2*PK1[I,NY-1]-PK1[I,NY-
2))/(1/TET+ 1);end;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin
PK[i,j]:= PK1[i,j]; UN1[i,j]:= UK[i,j];VN1[i,j]:= VK[i,j]; end;
{16 comment: ПРОВЕРКА выполнения уравнения
неразрывности АМАХ=
= max_{i,j} | (u_{i+1}^{n+1^k} - u_{ij}^{n+1^k}) / h_{xi+1} + (v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij}^{n+1^k}) / h_{yj+1} | ≤ ε }
If АМАХ>EPSILON then goto metk;

UMAX:=0; PMAX:=0;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin AU:=ABS(UN1[i,j]-
UN[i,j]); AV:=ABS(VN1[i,j]-VN[i,j]);

UMAX:= UMAX+AU+AV;
PN[i,j]:=PK1[i,j]; if ABS(PK1[i,j])>PMAX then PMAX :=
ABS(PK1[i,j]); UN[i,j]:= UN1[i,j];VN[i,j]:= VN1[i,j]; end;
UMAX:= UMAX/(NX*NY);

writeln (out2, 'номер слоя времени N=',N:9:0, ' АМАХ=' ,
АМАХ, 'КК=' , КК );
if N<500 then goto met; if N=1500 then goto met6;
met4: NN:=NN+1; {17 comment: Вывод на печать через каждые
1000 слоев времени} if NN<>1000 then goto met2;
met6: writeln (out1, 'номер слоя времени N=',N:9:0, ' АМАХ=' ,
АМАХ, 'КК=' , КК );writeln (out2, 'номер слоя времени
N=',N:9:0, ' АМАХ=' , АМАХ, 'КК=' , КК );
writeln (' N= ', N:9:0);
writeln ('Невязка=' , UMAX, ' АМАХ=' , АМАХ, 'КК=' , КК );

```

```

writeln (out1, 'UN='); writeln (out2, 'PN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out1, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do

        write (out1, ' ', UN[i,j]:9:4);writeln (out1); end;

writeln (out1, '*****'); writeln (out1, 'VN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out1, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do

        write (out1, ' ', VN[i,j]:9:4);writeln (out1);end;

writeln (out2, 'PN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out2, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do begin PK1[i,j]:= PK1[i,j]/PMAx;

write (out2, ' ', PK1[i,j]:9:4);writeln (out2);

end;end; met2: if NN=1000 then NN:=0;

if UMAX>0.01 then goto met;

close (out1);

close (out2);

end.

```

Вопросы

1. В чем заключается отличие полаявной схемы от неявной?
2. Написать схему без аппроксимационной вязкости типа (51), (52), (53).
3. Написать для схемы (51), (52), (53) систему разностных уравнений.
4. Для полученной системы написать итерационный алгоритм с параметром.
5. Применить метод верхней релаксации.

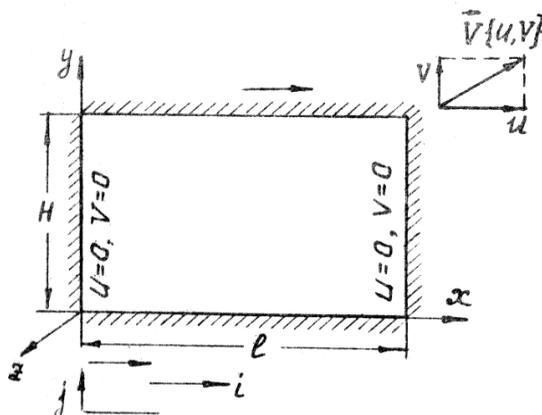
Модуль-12

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВИХРЯ СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ ТОКА

§1. Постановка задачи

Имеется заполненный вязкой несжимаемой жидкостью прямо-
угольный зазор с основанием длиной l и высотой H , боковые

грани которого непроницаемы и неподвижны, а твердые также непроницаемые основания могут двигаться с различными скоростями в своих плоскостях:



Обозначаются: x, y – физические координаты частиц жидкости в выбранной системе координат, t – время, $p = p(x, y, t)$ – давление в точке с координатами x, y на момент времени t , $\vec{v} = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j}$ – вектор скорости, $u = u(x, y, t)$ – продольная компонента вектора скорости, проекция \vec{v} на ось x , $v = v(x, y, t)$ – поперечная компонента вектора скорости, проекция \vec{v} на ось y ; $\rho = \text{const}$ – плотность несжимаемой жидкости μ – коэффициент динамической вязкости, $\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

В международной системе единиц измерения указанные величины имеют следующие размерности:

$$[x] = \text{м}, [y] = \text{м}, [t] = \text{сек}, [\vec{v}] = \frac{\text{м}}{\text{сек}}, [u] = \frac{\text{м}}{\text{сек}}, [v] = \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

$$[p] = \frac{\text{НЬЮТОН}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{сек}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}^2},$$

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}}, [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$$

Двумерные течения вязкой несжимаемой жидкости в декартовых координатах описываются уравнениями *Навье*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Для данной задачи о течении жидкости в зазоре начальные и граничные условия для уравнений (1),(2),(3) ставятся следующим образом:

Начальные условия: В момент времени $t = 0$ жидкость покоится, движение отсутствует $\vec{v}(x, y, 0) = 0$, следовательно, равны нулю обе компоненты скорости

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (4)$$

$$v(x, y, 0) = 0 \quad (5)$$

Граничные условия: боковые стенки непроницаемы и неподвижны, имеет место прилипание к твердой поверхности, поэтому на боковых стенках скорости равны нулю:

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = 0, \quad (6)$$

$$v(0, y, t) = v(l, y, t) = 0 \quad (7)$$

Верхняя стенка движется в своей плоскости, в силу прилипания на ней частицы жидкости имеют скорость, равную скорости движения этой поверхности. Пусть эта стенка движется со скоростью, равной $u_1 e^{-a^2/t}$, где u_1 и $a^2 > 0$ некоторые постоянные.

Тогда в силу сказанного имеют место:

$$u(x, H, t) = u_1 e^{-a^2/t}, \quad (8)$$

условие непроницаемости

$$v(x, H, t) = 0 \quad (9)$$

Аналогично, если нижнее основание движется со скоростью $u_2 e^{-a^2/t}$, то

$$u(x,0,t) = u_2 e^{-a^2/t}, \quad u_2 = \text{const}, \quad (10)$$

а также условие непроницаемости

$$v(x,0,t) = 0 \quad (11)$$

Для численного решения задачи (1)–(11) совершается переход к уравнениям для безразмерных переменных.

Безразмерные переменные вводятся следующим образом. Выбираются характерные размеры: для длины, например, l , для скорости u_1 , которую будет иметь при $t \rightarrow \infty$ верхняя стенка, для времени берется l/u_1 , для давления ρu_1^2 . Обозначим

безразмерные величины со штрихами: $x' = \frac{x}{l}$; $y' = \frac{y}{l}$;

$$u' = \frac{u}{u_1}; \quad v' = \frac{v}{u_1}; \quad p' = \frac{p}{\rho u_1^2}; \quad t' = \frac{t}{l/u_1}.$$

Используя правила дифференцирования, от уравнений (1)–(3) совершается переход к уравнениям в безразмерных переменных. Получаются:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + V' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\nu}{u_1 l} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial y'} = \frac{\nu}{u_1 l} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (15)$$

Начальные и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид:

$$u' \Big|_{t'=0} = 0; \quad v' \Big|_{t'=0} = 0; \quad (16)$$

$$u'(0, y', t') = u'(1, y', t') = 0, \quad (17)$$

$$v'(0, y', t') = v'(1, y', t') = 0, \quad (18)$$

$$u'(x', H/l, t') = e^{-b^2/t'}, \quad b^2 = au_1/l, \quad (19)$$

$$v'(x', H/l, t') = 0, \quad (20)$$

$$u'(x', 0, t') = u_2 / u_1 e^{-b^2 / t'}, \quad (21)$$

$$v'(x', 0, t') = 0 \quad (22)$$

Безразмерное число *Рейнольдса* равно $Re = u_1 l / \nu$. Вводится функция тока $\psi' = \psi'(x', y', t')$ из соотношений

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}, v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (23)$$

В силу (23) уравнение неразрывности (15) интегрируется точно. Подстановкой (23) в (13), (14) исключается p' . Получается в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \right) - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \right) = \\ = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Через вихрь скорости

$$\omega' = -\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2}, \quad (25)$$

уравнение (24) записывается в форме *Гельмгольца*:

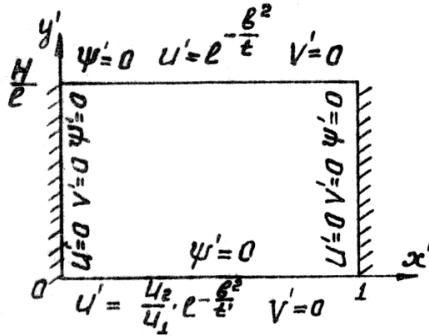
$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial y'} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2} \right) \quad (26)$$

Начальные и граничные условия для ψ' и ω выводятся из условий (4)–(11). Из-за наличия в системе (25),(26) только пространственных производных от ψ' , функция тока определяется с точностью до произвольной функции от времени t' , которой распоряжаются следующим образом.

Фиксируется произвольное значение ψ' в какой-либо точке области течения. Например, положим для любого момента времени t' значение ψ' в точке $x = 0, y = 0$ равным нулю, то есть $\psi'(0, 0, t') = 0$.

Учитывая, что из условий (20), (22) на горизонтальных стен-

как $\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = 0$, а из условий (17) на вертикальных стенках $\frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0$, проинтегрировав соответствующим образом найдем, что на всех четырех стенках $\psi' = 0$, что будет первым граничным условием для ψ' . Второе граничное условие для ψ' получается из условий (18), (19), (21).



Поэтому из (18) вытекают два граничных условия

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'}(0, y', t) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'}(1, y', t) = 0, \quad (28)$$

а из (19), (21) получаются условия на движущихся плоскостях

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'}(x', 0, t) = \frac{u_2}{u_1} \cdot e^{-b^2 t'/l^2}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\left(x', \frac{H}{l}, t\right) = e^{-b^2 t'/l^2}, \quad (30)$$

Начальное условие для ω' получается из начальных условий (16)

$$\omega' \Big|_{t'=0} = -\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \Big|_{t'=0} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} \Big|_{t'=0} = \frac{\partial V'}{\partial x'} \Big|_{t'=0} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \Big|_{t'=0} = 0$$

Отсюда из (25) с учетом нулевого краевого условия $\psi' = 0$ получаются нулевые начальные условия для обеих функций

$$\omega'|_{t'=0} = 0; \quad \psi'|_{t'=0} = 0 \quad (31)$$

Кроме этих условий, на стенках в качестве краевого условия для вихря скорости привлекается уравнение (25), что вполне логично. Численное решение задачи (25)–(31) возможно разностными методами, теория которых изложена в [3].

§2. Явная разностная схема

Область $\{0 \leq x' \leq 1, 0 \leq y' \leq H/l\}$ разбивается на сетку с

узлами $x'_i = ih_1$, где $h_1 = \frac{1}{N_1}$, N_1 – число отрезков, на которое

делится промежуток $[0, 1]$, $y' = jh_2$, $h_2 = \frac{H/l}{N_2}$, где N_2 – число

отрезков, на которое делится промежуток $[0, H/l]$.

Целочисленные индексы i, j соответствуют номерам узлов $i = 0, 1, 2, \dots, N_1; j = 0, 1, 2, \dots, N_2$. Сетку по времени возьмем с шагом $\tau > 0, t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots$

Обозначаются: $\psi'(x'_j, y'_i, t'_n) = \psi'_{ij}{}^n$, $\omega'(x'_j, y'_i, t'_n) = \omega'_{ij}{}^n$.

Явная конечно-разностная схема Джакупова К.Б. [20] для решения уравнений (25)–(26) имеет вид:

$$u'_{ij}{}^{m+1} = \frac{\psi'_{ij+1}{}^{m+1} - \psi'_{ij-1}{}^{m+1}}{2h_2}, v'_{ij}{}^{m+1} = -\frac{\psi'_{i+1j}{}^{m+1} - \psi'_{i-1j}{}^{m+1}}{2h_1},$$

$$\frac{\omega'_{ij}{}^{m+1} - \omega'_{ij}{}^m}{\tau} + \frac{|u'_{ij}{}^{m+1}| + u'_{ij}{}^{m+1}}{2} \cdot \frac{\omega'_{ij}{}^m - \omega'_{i-1j}{}^m}{h_1} + \frac{u'_{ij}{}^{m+1} - |u'_{ij}{}^{m+1}|}{2} \cdot \frac{\omega'_{i+1j}{}^m - \omega'_{ij}{}^m}{h_1} +$$

$$+ \frac{|v'_{ij}{}^{m+1}| + v'_{ij}{}^{m+1}}{2} \cdot \frac{\omega'_{ij}{}^m - \omega'_{ij-1}{}^m}{h_2} + \frac{v'_{ij}{}^{m+1} - |v'_{ij}{}^{m+1}|}{2} \cdot \frac{\omega'_{ij+1}{}^m - \omega'_{ij}{}^m}{h_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\operatorname{Re}} + \frac{|v_{ij}^{n+1}| h_y}{2}}{1 + \operatorname{Re}\left(\frac{|u_{ij}^{n+1}| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^{n+1}| h_y}{2}\right)} \frac{\omega_{i+1j}^{\prime n} - 2\omega_{ij}^{\prime n} + \omega_{i-1j}^{\prime n}}{h_1^2} + \\
&+ \frac{\frac{1}{\operatorname{Re}} + \frac{|u_{ij}^{n+1}| h_x}{2}}{1 + \operatorname{Re}\left(\frac{|u_{ij}^{n+1}| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^{n+1}| h_y}{2}\right)} \frac{\omega_{ij+1}^{\prime n} - 2\omega_{ij}^{\prime n} + \omega_{ij-1}^{\prime n}}{h_2^2},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1$$

При $n = 0$ значения $\psi_{i,j}^{\prime 0}$, $\omega_{i,j}^{\prime 0}$, $\omega_{i,j}^{\prime -1}$ для всех $0 \leq i \leq N_1$, $0 \leq j \leq N_2$ известны из (31) и равны 0.

По формулам Кусковой Т.В. 2-го порядка точности насчитываются значения $\omega_{i,j}^{\prime n+1}$ на стенках :

$$\omega_{0j}^{\prime n+1} = -\frac{8\psi_{1j}^{\prime n+1} - \psi_{2j}^{\prime n+1}}{2h_1^2}, \quad 0 \leq j \leq N_2, \tag{33}$$

$$\omega_{N_1j}^{\prime n+1} = -\frac{8\psi_{N_1-1j}^{\prime n+1} - \psi_{N_1-2j}^{\prime n+1}}{2h_1^2}, \quad 0 \leq j \leq N_2, \tag{34}$$

$$\omega_{i0}^{\prime n+1} = -\frac{8\psi_{i1}^{\prime n+1} - \psi_{i2}^{\prime n+1} - 6h_2 \frac{u_2}{u_1} e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}}{2h_2^2}, \quad 0 \leq i \leq N_1, \tag{35}$$

$$\omega_{iN_2}^{\prime n+1} = -\frac{8\psi_{iN_2-1}^{\prime n+1} - \psi_{iN_2-2}^{\prime n+1} + 6h_2 e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}}{2h_2^2}, \quad 0 \leq i \leq N_1 \tag{36}$$

Для реализации (32)-(36) предварительно решается разностный аналог уравнения (25):

$$\frac{\psi_{i+1j}^{\prime n+1} - 2\psi_{ij}^{\prime n+1} + \psi_{i-1j}^{\prime n+1}}{h_1^2} + \frac{\psi_{ij+1}^{\prime n+1} - 2\psi_{ij}^{\prime n+1} + \psi_{ij-1}^{\prime n+1}}{h_2^2} = -2\omega_{ij}^{\prime n} + \omega_{ij}^{\prime n-1}, \tag{37}$$

$$1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1$$

На стенках $\psi' = 0$, что записывается в граничных узлах в виде

$$\psi'_{0j}{}^{n+1} = \psi'_{N_1j}{}^{n+1} = 0, \quad 0 \leq j \leq N_2; \quad (38)$$

$$\psi'_{i0}{}^{n+1} = \psi'_{iN_2}{}^{n+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N_1 \quad (39)$$

Уравнения (37) при условиях (38), (39) можно решать каким-либо итерационным методом. Ради удобства обозначается $\psi'_{ij}{}^{n+1}$

через $\bar{\psi}_{ij}$. Применяется параметрический процесс:

$$\frac{\bar{\psi}_{ij}^{k+1} - \bar{\psi}_{ij}^k}{\theta} = \frac{\bar{\psi}_{i+1j}^k - 2\bar{\psi}_{ij}^{k+1} + \bar{\psi}_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{\bar{\psi}_{i+1j}^k - 2\bar{\psi}_{ij}^{k+1} + \bar{\psi}_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + 2\omega_{ij}'^n - \omega_{ij}'^{n-1}, \quad (40)$$

$$1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1.$$

На стенках $\bar{\psi}^{k+1} = 0$, $\theta > 0$ – итерационный параметр. Из (40) имеем следующую вычислительную формулу:

$$\bar{\psi}_{ij}^{k+1} = \left[\frac{\bar{\psi}_{ij}^k}{\theta} + \frac{\bar{\psi}_{i+1}^k + \bar{\psi}_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{\bar{\psi}_{ij+1}^k + \bar{\psi}_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + 2\omega_{ij}'^n - \omega_{ij}'^{n-1} \right] / \left(\frac{1}{\theta} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1, \quad (41)$$

Итерации прекращаются при выполнении условия для невязки

$$\max_{i,j} \left| \frac{\bar{\psi}_{i+1}^{k+1} - 2\bar{\psi}_{ij}^{k+1} + \bar{\psi}_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{\bar{\psi}_{ij+1}^{k+1} - 2\bar{\psi}_{ij}^{k+1} + \bar{\psi}_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + 2\omega_{ij}'^n - \omega_{ij}'^{n-1} \right| \leq \varepsilon \quad (42)$$

Последние итерации $\bar{\psi}_{ij}^{k+1}$ принимаются за значения $\psi'_{ij}{}^{n+1}$.

Для следующего шага по времени весь процесс вычислений повторяется, начиная с (32), кончая (41).

Для получения физической картины течения вязкой жидкости в зазоре в сеточной области нужно построить изолинии функции тока, вихря скорости, т.е. вывести сплошными линиями те точки, в которых эти функции имеют одинаковые значения.

§3. Схема альтернативных направлений. Итерационный алгоритм

Определив функцию тока Ψ_{ij}^{n+1} по алгоритму (41) легко организовать схему переменных направлений *специфического вида*:

$$\frac{\omega'^{n+\frac{1}{2}} - \omega'^n}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+1} \omega'^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+1} \omega'^n, x \in \Omega_h, \quad (43)$$

$$\frac{\omega'^{n+1} - \omega'^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+1} \omega'^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+1} \omega'^{n+1}, x \in \Omega_h, \quad (44)$$

откуда получается после исключения $\Lambda_1^{n+1} \omega'^{n+\frac{1}{2}}$ выражение

$$\omega'^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\omega'^n + \omega'^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4} \Lambda_2^{n+1} (\omega'^n - \omega'^{n+1}), x \in \Omega_h,$$

что позволяет поставить граничные условия по *Дьяконову Е.Г.*

$$\omega'^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} = \frac{\omega'^n + \omega'^{n+1}}{2} \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)} + \frac{\tau}{4} \Lambda_2^{n+1} (\omega'^n - \omega'^{n+1}) \Big|_{S_h \left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=a_1 \end{smallmatrix} \right)}$$

Примечание. При стационарных краевых условиях схема (43), (44) может служить в качестве итерационного алгоритма для нахождения решения стационарных уравнений *Гельмгольца*.

Вопросы.

1. Для аппроксимации конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости».
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления $\bar{\Psi}_{ij}^{k+1}$.
3. Конвективные члены аппроксимировать направленными разностями Булеева-Петрищева.
4. Применить метод последовательной верхней релаксации для вычисления $\bar{\Psi}_{ij}^{k+1}$.
5. Написать условие устойчивости явной схемы для аппроксимации Булеева-Петрищева.

Модуль-13 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§1. Разностная схема модели Форцгеймера

В уравнениях «закона Дарси» теории фильтрации

$$k\vec{v} = -gradp + \rho\vec{F}, \quad div \vec{v} = 0$$

есть силы $-gradp + \rho\vec{F}$, но нет вызванных этими силами ускорений $\frac{d\vec{v}}{dt}$ частиц, что противоречит 2-му закону Ньютона, поэтому уравнения «закона Дарси» не могут служить моделью динамики фильтруемой жидкости (см. Джакупов К.Б./17/).

Модель Форцгеймера /24/, в отличие от «закона Дарси», содержит локальное ускорение $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ и имеет вид:

$$\rho_f \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\phi[\nabla(p + \rho_f gz) + \rho_f \frac{v}{K} \vec{v} + \rho_f c_f K^{\frac{1}{2}} |\vec{v}| \vec{v}], \quad div \vec{v} = 0$$

Здесь ϕ - коэффициент пористости среды, K - коэффициент проницаемости, ρ_f - плотность жидкости, c_f - безразмерный коэффициент трения Форцгеймера. Учтена также вязкость жидкости поскольку входит коэффициент кинематической вязкости ν .

Эти уравнения при соответствующих физической постановке задачи начальных и граничных условиях могут быть решены по схемам, технология построения которых приведена в модуле-11.

Напишем данные уравнения Форцгеймера в проекциях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \phi \left[\frac{\nu}{K} u + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} u \right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \phi \left[\frac{\nu}{K} v + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} v \right],$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} + \varphi \left[\frac{v}{K} w + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} w - g \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Задается равномерная сетка

$$\Omega_h = \left\{ (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \right. \\ \left. i = 1, \dots, N_x - 1; j = 1, \dots, N_y - 1; m = 1, \dots, N_z - 1 \right\}$$

$$S_h = \{ \overline{i=0, i=N_x}, \overline{j=0, j=N_y}, \overline{m=0, m=N_z}; j=0, j=N_y, \\ i=0, i=N_x, m=0, m=N_z; m=0, m=N_z, j=0, j=N_y, i=0, i=N_x \}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h$$

Начальные условия задаются на сетке Ω_h^0 :

$$u_{ijm}^0 = d_{0ijm}, v_{ijm}^0 = \hat{d}_{0ijm}, w_{ijm}^0 = \hat{d}_{0ijm}, \\ i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, m = \overline{1, N_z - 1},$$

Допустим, что на сетке S_h имеют место граничные условия для скоростей типа следующих:

$$x = 0, u_{0jm}^{n+1} = \varphi_{0jm}^{n+1}, v_{0jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, w_{0jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, \\ x = a_1, u_{N_x jm}^{n+1} = \varphi_{N_x jm}^{n+1}, v_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, w_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, \\ j = \overline{0, N_y}, m = \overline{0, N_z}, \\ y = 0, u_{i0m}^{n+1} = \varphi_{i0m}^{n+1}, v_{i0m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, w_{i0m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, \\ y = a_2, u_{iN_y m}^{n+1} = \varphi_{iN_y m}^{n+1}, v_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, w_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, \\ i = \overline{0, N_x}, m = \overline{0, N_z}, \\ z = 0, u_{ij0}^{n+1} = \varphi_{ij0}^{n+1}, v_{ij0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}, w_{ij0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1},$$

$$z = a_3, u_{ijN_z}^{n+1} = \varphi_{ijN_z}^{n+1}, v_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1}, w_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1},$$

$$i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}$$

Полуявная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n = \varphi \left[\frac{v}{K} u_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} u_{ijm}^n \right],$$

$$Q_{vijm}^n = \varphi \left[\frac{v}{K} v_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} v_{ijm}^n \right],$$

$$Q_{w_{ijm}}^n = \varphi \left[\frac{v}{K} w_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} w_{ijm}^n - g \right],$$

$$\frac{u_{ijm}^{n+1} - u_{ijm}^n}{\tau} = Q_{uijm}^n - \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p_{i+1jm}^{n+1} - p_{i-1jm}^{n+1}}{2h_x},$$

$$\frac{v_{ijm}^{n+1} - v_{ijm}^n}{\tau} = Q_{vijm}^n - \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p_{ij+1m}^{n+1} - p_{ij-1m}^{n+1}}{2h_y},$$

$$\frac{w_{ijm}^{n+1} - w_{ijm}^n}{\tau} = Q_{w_{ijm}}^n - \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p_{ijm+1}^{n+1} - p_{ijm-1}^{n+1}}{2h_z},$$

$$\frac{u_{i+1jm}^{n+1} - u_{i-1jm}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1} - v_{ij-1m}^{n+1}}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1} - w_{ijm-1}^{n+1}}{2h_z} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_m - 1,$$

в граничных узлах S_h :

$$i = 0, \frac{u_{1jm}^{n+1} - \varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{0jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial z} \right)_{0jm}^{n+1} = 0,$$

$$i = N_x, \frac{\varphi_{N_x jm}^{n+1} - u_{N_x-1jm}^{n+1}}{h_x} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_x jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial z} \right)_{N_x jm}^{n+1} = 0;$$

$$j = 0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i0m}^{n+1} + \frac{v_{i1m}^{n+1} - \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}}{h_y} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{i0m}^{n+1} = 0,$$

$$j = N_y, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{iN_y m}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1} - v_{iN_y-1m}^{n+1}}{h_y} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{iN_y m}^{n+1} = 0;$$

$$m = 0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ij0}^{n+1} + \frac{w_{ij1}^{n+1} - \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ij0}^{n+1} = 0,$$

$$m = N_z, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1} = 0$$

Глобальный итерационный процесс строится так:

$$F_{uijm}^n = u_{ijm}^n + \tau Q_{ijm}^n, F_{vijm}^n = v_{ijm}^n + \tau Q_{ijm}^n, F_{wijm}^n = w_{ijm}^n + \tau Q_{ijm}^n,$$

$$u_{ijm}^{n+1,k} = F_{uijm}^n - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{P_{i+1jm}^{n+1,k} - P_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x},$$

$$v_{ijm}^{n+1,k} = F_{vijm}^n - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{P_{ij+1m}^{n+1,k} - P_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y},$$

$$w_{ijm}^{n+1,k} = F_{wijm}^n - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{P_{ijm+1}^{n+1,k} - P_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1,$$

$$(1 + A_{ijm} \theta) \frac{P_{ijm}^{n+1,k+1} - P_{ijm}^{n+1,k}}{\theta} + \frac{u_{i+1jm}^{n+1,k} - u_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1,k} - v_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1,k} - w_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z} = 0,$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq m \leq N_z - 1,$$

$$(1 + A_{N_x jm} \theta) \frac{P_{N_x jm}^{n+1,k+1} - P_{N_x jm}^{n+1,k}}{\theta} + \frac{\varphi_{N_x jm}^{n+1} - u_{N_x-1jm}^{n+1,k}}{h_x} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{N_x jm}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \right)_{N_x jm}^{n+1} = 0,$$

$$(1+A_{0jm}\theta)\frac{p_{0jm}^{n+1,k+1}-p_{0jm}^{n+1,k}}{\theta}+\frac{u_{1jm}^{n+1,k}-\varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{0jm}^{n+1}+(\frac{\partial\hat{\ddot{\varphi}}}{\partial z})_{0jm}^{n+1}=0,$$

$$1\leq j\leq N_y-1, 1\leq m\leq N_z-1,$$

$$(1+A_{iN_y m}\theta)\frac{p_{iN_y m}^{n+1,k+1}-p_{iN_y m}^{n+1,k}}{\theta}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{iN_y m}^{n+1}+\frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}-v_{iN_y-1m}^{n+1,k}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z})_{iN_y m}^{n+1}=0,$$

$$(1+A_{i0m}\theta)\frac{p_{i0m}^{n+1,k+1}-p_{i0m}^{n+1,k}}{\theta}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{i0m}^{n+1}+\frac{v_{i1m}^{n+1}-\hat{\varphi}_{i0m}^{n+1,k}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z})_{i0m}^{n+1}=0,$$

$$1\leq i\leq N_x-1, 1\leq m\leq N_z-1,$$

$$(1+A_{ijN_z}\theta)\frac{p_{ijN_z}^{n+1,k+1}-p_{ijN_z}^{n+1,k}}{\theta}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+\frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1}-w_{ijN_z-1}^{n+1,k}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}=0,$$

$$(1+A_{ij0}\theta)\frac{p_{ij0}^{n+1,k+1}-p_{ij0}^{n+1,k}}{\theta}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ij0}^{n+1}+\frac{w_{ij1}^{n+1}-\hat{\varphi}_{ij0}^{n+1,k}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ij0}^{n+1}=0,$$

$$1\leq i\leq N_x-1, 1\leq j\leq N_y-1,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_{ijm} = & 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[\frac{1}{2h_x} \frac{1 - \text{sign}(i - N_x + 1.5)}{2} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2h_x} \frac{1 + \text{sign}(i - 1.5)}{2} \left. \right] + \frac{1}{2h_y} \left[\frac{1}{2h_y} \frac{1 - \text{sign}(j - N_y + 1.5)}{2} + \right. \\ & + \frac{1}{2h_y} \frac{1 + \text{sign}(j - 1.5)}{2} \left. \right] + \frac{1}{2h_z} \left[\frac{1}{2h_z} \frac{1 - \text{sign}(m - N_z + 1.5)}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2h_z} \frac{1 + \text{sign}(m - 1.5)}{2} \right] \right\}, i=1, \dots, N_x-1, j=1, \dots, N_y-1, m=1, \dots, N_z-1; \end{aligned}$$

$$A_{N_x jm} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_x^2}, A_{0jm} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_x^2},$$

$$j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$A_{iN_y m} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_y^2}, A_{i0m} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_y^2},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, m = 1, \dots, N_z - 1;$$

$$A_{ijN_z} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_z^2}, A_{ij0} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{1}{2h_z^2},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$$

Если вместо граничного условия

$$m = N_z, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1,$$

задано давление $p_{ijN_z}^{n+1} = \varphi_{ijN_z}^{n+1}$, $i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$, то уравнение неразрывности

$$(1 + A_{ijN_z} \theta) \frac{P_{ijN_z}^{n+1, k+1} - P_{ijN_z}^{n+1, k}}{\theta} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \frac{\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} - w_{ijN_z-1}^{n+1, k}}{h_z} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1} = 0,$$

в итерационном алгоритме не применяется. Из данного уравнения неразрывности вычисляется компонента скорости

$$m = N_z, \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1} = w_{ijN_z-1}^{n+1} - h_z \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1} \right],$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1,$$

при необходимости производные в них $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{ijN_z}^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)_{ijN_z}^{n+1}$

заменяются на разностные соотношения

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ijN_z}^{n+1} \approx \frac{u_{i+1jN_z}^{n+1} - u_{i-1jN_z}^{n+1}}{2h_x}, \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}\right)_{ijN_z}^{n+1} \approx \frac{v_{ij+1N_z}^{n+1} - v_{ij-1N_z}^{n+1}}{2h_y}$$

Параметр $\theta > 0$ выбирается из интервала $0 < \theta \leq 1/2$. Процесс вычислений останавливается на таком номере итераций k^* , при котором выполняется следующее неравенство для невязки

$$\max_{0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq m \leq N_z} |R_{ijm}^{k^*}| \leq \varepsilon, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0$$

При выполнении данного критерия последние приближения $P_{ijm}^{n+1, k^*}, u_{ijm}^{n+1, k^*}, v_{ijm}^{n+1, k^*}, w_{ijm}^{n+1, k^*}$ берутся в качестве решения

$$P_{ijm}^{n+1, k^*} \approx P_{ijm}^{n+1}, u_{ijm}^{n+1, k^*} \approx u_{ijm}^{n+1}, v_{ijm}^{n+1, k^*} \approx v_{ijm}^{n+1}, w_{ijm}^{n+1, k^*} \approx w_{ijm}^{n+1}, \\ i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, m = 0, \dots, N_z.$$

§2. Коррекция модели Форцгеймера. Разностная схема

Локальное ускорение $\frac{d\vec{v}}{dt}$ заменяется на индивидуальное $\frac{d\vec{v}}{dt}$ и учитывается закон трения Ньютона $\mu\Delta\vec{v}$. В результате получается система уравнений, идентичная уравнениям Навье вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = -\varphi[\nabla(p + \rho_f gz) + \rho_f \frac{v}{K} \vec{v} + \rho_f c_f K^{-\frac{1}{2}} |\vec{v}| \vec{v} + \mu\Delta\vec{v}], \quad (2) \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Численное решение начально-краевой задачи для системы (2) производится методами, развитыми для уравнений вязкой жидкости /3/ в модулях-6,11.

Поэтому для получения готового алгоритма для численного решения системы (2) в схеме §1 достаточно положить:

$$Q_{uijm}^n = \varphi \left[\frac{v}{K} u_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} u_{ijm}^n + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\mu_x^{vw} u_{x\bar{x}}^n + \mu_y^{wu} u_{y\bar{y}}^n + \mu_z^{uv} u_{z\bar{z}}^n)] - \\
& - 0,5(|u_{ijm}^n| + u_{ijm}^n) u_{\bar{x}}^n - 0,5(u_{ijm}^n - |u_{ijm}^n|) u_x^n - \\
& - 0,5(|v_{ijm}^n| + v_{ijm}^n) u_{\bar{y}}^n - 0,5(v_{ijm}^n - |v_{ijm}^n|) u_y^n - \\
& - 0,5(|w_{ijm}^n| + w_{ijm}^n) u_{\bar{z}}^n - 0,5(w_{ijm}^n - |w_{ijm}^n|) u_z^n, \\
Q_{vijm}^n = & \varphi \left[\frac{v}{K} v_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} v_{ijm}^n + \right. \\
& + (\mu_x^{vw} v_{x\bar{x}}^n + \mu_y^{wu} v_{y\bar{y}}^n + \mu_z^{uv} v_{z\bar{z}}^n)] - \\
& - 0,5(|u_{ijm}^n| + u_{ijm}^n) v_{\bar{x}}^n - 0,5(u_{ijm}^n - |u_{ijm}^n|) v_x^n - \\
& - 0,5(|v_{ijm}^n| + v_{ijm}^n) v_{\bar{y}}^n - 0,5(v_{ijm}^n - |v_{ijm}^n|) v_y^n - \\
& - 0,5(|w_{ijm}^n| + w_{ijm}^n) v_{\bar{z}}^n - 0,5(w_{ijm}^n - |w_{ijm}^n|) v_z^n, \\
Q_{wijm}^n = & \varphi \left[\frac{v}{K} w_{ijm}^n + c_f K^{-\frac{1}{2}} (u_{ijm}^{n2} + v_{ijm}^{n2} + w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}} w_{ijm}^n - g + \right. \\
& + (\mu_x^{vw} w_{x\bar{x}}^n + \mu_y^{wu} w_{y\bar{y}}^n + \mu_z^{uv} w_{z\bar{z}}^n)] - \\
& - 0,5(|u_{ijm}^n| + u_{ijm}^n) w_{\bar{x}}^n - 0,5(u_{ijm}^n - |u_{ijm}^n|) w_x^n - \\
& - 0,5(|v_{ijm}^n| + v_{ijm}^n) w_{\bar{y}}^n - 0,5(v_{ijm}^n - |v_{ijm}^n|) w_y^n - \\
& - 0,5(|w_{ijm}^n| + w_{ijm}^n) w_{\bar{z}}^n - 0,5(w_{ijm}^n - |w_{ijm}^n|) w_z^n
\end{aligned}$$

с соответствующим оформлением коэффициентов $\mu_x^{vw}, \mu_y^{wu}, \mu_z^{uv}$,

так как уравнения предварительно умножены на $\frac{1}{\rho_f}$.

§3. Коррекция модели Нумерова фильтрации в насыщенных пористых средах

Нумеров С.Н. еще в 1968г. обратил внимание на необходимость учета сил инерции в основных уравнениях теории фильтрации и предложил в [25] использовать следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{g\sigma} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{g\sigma^2} (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \text{grad}h + f(\vec{v})\vec{v} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0$$

Тем самым *Нумеров С.Н.* впервые обратил внимание исследователей на недопустимость нарушений законов *Ньютона*, которые гласят: «масса на ускорение равно силе», если ускорение равно нулю, то тело совершает прямолинейное движение с постоянной скоростью.

Коррекция модели *Нумерова* заключается в использовании закона трения *Ньютона* $\mu \Delta \vec{v}$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + g\sigma \text{grad}h + g\sigma f(\vec{v})\vec{v} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad \text{div} \vec{v} = 0$$

Численная реализация соответствующих начально-краевых задач для уравнений коррекции модели *Нумерова* производится по алгоритму предыдущего параграфа, т.е. применяется монотонная схема типа **модулей-6,11**.

Вопросы.

1. Для аппроксимации конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости».
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления давления.
3. Конвективные члены аппроксимировать направленными разностями *Булеева-Петрищева*.
4. Применить метод последовательной верхней релаксации.

Модуль-14 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Проблема построения эффективных алгоритмов численного решения уравнений метеорологии поставлена *Г.И. Марчуком/26/*.

Во многих работах для вычисления плотности газа используется уравнение неразрывности, причем в расщепленном виде. Как показывает практика вычислений, алгоритмы такого типа приводят к *осцилляциям* решения, к отрицательным и нулевым значениям плотности газа, что противоречит сущности плотнос-

ти, как сугубо положительной физической величины. В монографии /3/ предложен принципиально новый подход к построению численных алгоритмов решения уравнений атмосферной гидротермодинамики, свободной от указанных недостатков. Отличительной чертой данного подхода является то, что уравнение неразрывности не расщепляется, а служит для получения замкнутой системы разностных уравнений для давления (см. модуль-11), при этом плотность газа вычисляется из уравнения состояния.

§1. Полуявная разностная схема Джакупова

В системе координат, выбранной так, что ось x направлена на восток, ось y - на север, а ось z - вертикально вверх, уравнения гидротермодинамики атмосферных процессов на плоской земле имеют вид /26/:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \left(w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ & = \rho \mu \Delta u + v \rho \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \rho \omega (v \cdot \cos \theta - w \sin \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \left(w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ & = \rho \mu \Delta v + v \rho \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \rho \omega u \cos \theta, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \left(w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = \rho \mu \Delta w + v \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \rho \omega u \sin \theta - \rho g, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad p = R \rho T, \quad (4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \left(w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(v\rho)}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] =$$

$$= \rho\mu\Delta T + \nu\rho \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\rho\varepsilon}{C_p} + \frac{\gamma_a}{g} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Для уравнений (1)-(5) ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$u|_{t=0} = v_1^0(\vec{r}), v|_{t=0} = v_2^0(\vec{r}), w|_{t=0} = v_3^0(\vec{r}), T|_{t=0} = T^0(\vec{r}), \rho|_{t=0} = \rho^0(\vec{r}), \quad (6)$$

$$x=0, x=a_1, y=0, y=a_2, u|_S = \varphi_1, v|_S = \varphi_2, w|_S = \varphi_3, T|_S = \varphi_4,$$

$$z=0, u|_S = \varphi_1 = 0, v|_S = \varphi_2 = 0, w|_S = \varphi_3 = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_S = 0, \quad (7)$$

$$z=a_3, \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_S = 0, \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_S = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_S = 0, \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_S = 0. \quad (8)$$

Для упрощения дальнейших записей удобно применять индексные обозначения:

$$x=x_1, y=x_2, z=x_3, u=v_1, v=v_2, w=v_3, i=i_1, j=i_2, k=i_3$$

Систему (1)-(5) перепишем в новых обозначениях.

$$\rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 \bar{v}_m \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = \rho\mu\Delta v_k + \nu\rho \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_3^2} + f_k, \quad k=1,2,3, \quad (9)$$

$$f_1 = 2\rho\omega(v_2 \cdot \cos\theta - v_3 \cdot \sin\theta), f_2 = -2\rho\omega v_1 \cdot \cos\theta, \quad (10)$$

$$f_3 = 2\rho\omega v_1 \sin\theta - \rho g,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad p = R\rho T,$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 \bar{v}_m \frac{\partial T}{\partial x_m} \right) &= \rho\mu\Delta T + \nu\rho \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\rho\varepsilon}{C_p} + \\ &+ \frac{\gamma_a}{g} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 v_m \frac{\partial p}{\partial x_m} \right), \quad \bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_2 = v_2, \bar{v}_3 = v_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\nu\rho)}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (11)$$

Схема строится по методике, разработанной в **модулях-6,11**. При этом соблюдается принцип взаимосогласованной аппроксимации градиентов давления и уравнения неразрывности; градиент давления и компоненты скорости в уравнении неразрывнос-

ти берутся на верхнем слое времени, а все остальные члены уравнений (9)-(11) на нижнем слое:

$$\rho^n \left[\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau_{n+1}} + 0,5 \sum_{m=1}^3 \{ (\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|) v_{k\bar{x}_m}^n + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|) v_{kx_m}^n \} \right] + \quad (12)$$

$$+ \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1} = \sum_{m=1}^3 v_m^n v_{kx_m \dot{x}_m}^n + f_k^n, k=1,2,3, x \in \Omega_h,$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + \sum_{k=1}^3 [\bar{\alpha}_k (\rho^n v_k^{n+1})_{x_k} + \bar{\beta}_k (\rho^n v_k^{n+1})_{\bar{x}_k}] = 0, x \in \Omega_h, \quad (13)$$

$$\bar{\alpha}_k \left[\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + (\rho^n v_k^{n+1})_{x_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} \right] = 0, x \in S_{kh}, k=1,2,3, \quad (14)$$

$$\bar{\beta}_k \left[\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + (\rho^n v_k^{n+1})_{\bar{x}_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} \right] = 0, x \in \bar{S}_{kh}, k=1,2,3, \quad (15)$$

$$\rho^n [T_t + 0,5 \sum_{m=1}^3 \{ (\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|) T_{k\bar{x}_m}^n + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|) T_{kx_m}^n \}] =$$

$$= \sum_{m=1}^3 v_m^n T_{x_m \dot{x}_m}^n + C_p^{-1} \varepsilon + g^{-1} \gamma_a (p_t + \sum_{m=1}^3 v_m^n p_{\dot{x}_m}^n), x \in \Omega_h, \quad (16)$$

$$\rho^{n+1} = (RT^{n+1})^{-1} p^{n+1}, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \quad t \in \Omega_{\tau_0},$$

где по результатам модуля-6

$$Q = 1 + \frac{1}{4\rho^n \mu} \sum_{m=1}^2 [(\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|) h_{mi_m} + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|) h_{mi_{m+1}}] +$$

$$+ \frac{1}{4\rho^n v^n} [(\bar{v}_3^n + |\bar{v}_3^n|) h_{3i_3} + (\bar{v}_3^n - |\bar{v}_3^n|) h_{3i_3+1}],$$

$$v_m^n = \frac{1}{Q} [\rho^n \mu + \frac{1}{4} \{ (|\bar{v}_k^n| + \bar{v}_k^n) h_{ki_k} + (|\bar{v}_k^n| - \bar{v}_k^n) h_{ki_k+1} \} +$$

$$+ \frac{1}{4\rho^n v} \{ (|\bar{v}_3^n| + \bar{v}_3^n) h_{3i_3} + (|\bar{v}_3^n| - \bar{v}_3^n) h_{3i_3+1} \}], k=3-m, m=1,2,$$

$$v_3^n = \frac{1}{Q} [\rho^n v + \frac{\rho^n v}{4\rho^n \mu} \sum_{k=1}^2 \{(|\bar{v}_k^n| + \bar{v}_k^n) h_{ki_k} + (|\bar{v}_k^n| - \bar{v}_k^n) h_{ki_{k+1}}\}]$$

Конвективные члены в (12), (15) аппроксимированы со вторым порядком погрешности $O([h_{mi_m} + h_{mi_{m+1}}]^2)$, диссипативные члены - с погрешностью

$$O(\mu \sum_{m=1}^2 [|h_{mi_m} - h_{mi_{m+1}}| + (h_{mi_m} + h_{mi_{m+1}})^2] + \nu [|h_{3i_3} - h_{3i_{3+1}}| + (h_{3i_3} + h_{3i_{3+1}})^2]),$$

градиент давления и уравнение неразрывности –

$$O(\sum_{k=1}^3 [|\alpha_k h_{ki_k} - \beta_k h_{ki_{k+1}}| + (h_{ki_k} + h_{ki_{k+1}})^2])$$

По времени схема имеет 1-й порядок аппроксимации. В силу граничных условий (7) и (8) в (14), (15) при $k = 1$ ($x = 0, x = a_1$) и $k = 2$ ($y = a_2$) имеет место равенство

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n \varphi_m^{n+1}}{\partial x_m}, \quad (17)$$

При $k = 3$ ($z = 0$) $\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} = 0$, а (15) при $k = 3$ ($z = a_3$)

в силу условий (8) рассматривается с использованием аппроксимации граничного условия

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = 0: R_{i_2 N_3}^{n+1} = 2R_{i_2 N_3 - 1}^{n+1} - R_{i_2 N_3 - 2}^{n+1}, x \in \bar{S}_{3h}, R = (u, v, w, T), \quad (18)$$

$$h_{3N_3} = h_{3N_3 - 1}.$$

Принципиальное отличие предлагаемых здесь разностных методов от приведенных в /26/ заключается, помимо вышеизложенных, в алгоритмах их реализаций. В частности, схема (12)-(18) реализуется в следующем порядке. Уравнения (12) представляются в виде /3/, /27/:

$$Q_k^j = -\tau_{n+1}^{-1} \rho^n v_k^n + 0,5 \rho^n \sum_{m=1}^3 \{ (\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|) v_{k\bar{x}_m}^n + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|) v_{kx_m}^n \} -$$

$$-\sum_{m=1}^3 v_m^n v_m^n k x_m \dot{x}_m - f_k^n, \quad (19)$$

$$\rho^n v_k^{n+1} = (-\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} - \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1} - Q_k^n) \tau_{n+1}, \quad k = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega_h, \quad (20)$$

затем (20) и (16) подставляются в уравнения неразрывности (13)-(15) и в результате получается система разностных уравнений для давления.

Во внутренних узлах Ω_h , которым соответствуют индексы

$1 \leq i_k \leq N_k - 1, k = 1, 2, 3$ система получается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + 0,5 \sum_{k=1}^3 \left\{ \bar{\alpha}_k [1 - \text{sign}(i_k - N_k + 1, 5)] \cdot \left[-\tau_{j+1} (Q_k^n + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) \right]_{x_k} + \bar{\alpha}_k [1 + \text{sign}(i_k - N_k + 1, 5)] \left[(\rho^n \varphi_k^{n+1}) \right]_{\bar{s}_{kh}} + \right. \\ & \left. + \tau_{n+1} (Q_k^n + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) \right] h_{ki_k+1}^{-1} + \bar{\beta}_k [1 + \text{sign}(i_k - 1, 5)] \cdot \\ & \cdot \left[-\tau_{n+1} (Q_k^n + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) \right]_{\bar{x}_k} + \bar{\beta}_k [1 - \text{sign}(i_k - 1, 5)] \cdot \\ & \cdot \left[-\tau_{n+1} (Q_k^n + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) - (\rho^n \varphi_k^{n+1}) \right]_{S_{kh}} h_{ki_k}^{-1} \} = 0, \quad x \in \Omega_h, \quad (21) \end{aligned}$$

в граничных узлах S_{kh} , которым соответствуют индексы $i_k = 0$:

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}_k \left\{ \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + [(-\tau_{n+1}) T_k (Q_k^n + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) - \right. \\ & \left. - \rho^n \varphi_k^{n+1}] h_{ki_k+1}^{-1} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} \right\} = 0, \quad x \in S_{kh}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (22) \end{aligned}$$

в граничных узлах \bar{S}_{kh} , которым соответствуют индексы $i_k = N_k$:

$$\bar{\beta}_k \left\{ \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + \left[\rho^j \varphi_k^{j+1} \right]_{\bar{s}_{kh}} + \tau_{n+1} T_{-k} (Q_k^n + \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}) \right] h_{ki_k}^{-1} +$$

$$+ \left. \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} \right\} = 0, x \in \bar{S}_{kh}, k = 1, 2, 3 \quad (23)$$

При $k = 3$ в (23) подставляются (18), затем (20).

Уравнения (22), (23), а также (18) являются разностными граничными условиями для давления. Система (18), (21)-(23) является замкнутой.

§2. Решение уравнений для давления методом глобальных итераций

Применяется модифицированный итерационный метод с параметром $\theta > 0$. В этом случае в принципе можно не проводить подробную запись (21), (22), (23) и весь процесс итерирования можно записать в экономичном виде: s – номер итерации, верхний индекс $n+1$ опускается $\lim_{s \rightarrow \infty} v_k^s = v_k^{n+1}$, $k = 1, 2, 3$, $\lim_{s \rightarrow \infty} p^s = p^{n+1}$, за нулевые итерации берутся $v_k^0 = v_k^n$, $k = 1, 2, 3$, $p^0 = p^n$, $x \in \bar{\Omega}_h$. По вычисленным v_k^s, p^s следующая итерация v_k^{s+1}, p^{s+1} находится по явному алгоритму

$$\rho^n v_k^{s+1} = (-\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^s - \bar{\beta}_k p_{x_k}^s - Q_k^n) \tau_{n+1}, x \in \Omega_h, v_k^{s+1} \Big|_{S_h} = \varphi_k^{n+1}, \quad (1)$$

$$(1 + A^n \theta) \frac{p^{s+1} - p^s}{\theta} + \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + \sum_{k=1}^3 \left[\bar{\alpha}_k (\rho^n v_k^{s+1})_{x_k} + \bar{\beta}_k (\rho^n v_k^{s+1})_{\bar{x}_k} \right] = 0, x \in \Omega_h, \quad (2)$$

$$\bar{\alpha}_k \left[(1 + A^n \theta) \frac{p^{s+1} - p^s}{\theta} + \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + (\rho^j v_k^{n+1})_{x_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^j \varphi_m^{j+1}}{\partial x_m} \right] = 0, x \in S_{kh}, k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\bar{\beta}_k[(1+A^n\theta)\frac{p^{s+1}-p^s}{\theta}+\frac{1}{\tau_{n+1}}(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n)]+ (\rho^n v_k^{s+1})_{\bar{x}_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial \rho^n \varphi_m^{n+1}}{\partial x_m} = 0, x \in \bar{S}_{kh}, k=1,2, \quad (4)$$

$$P_{i_1 i_2 N_3}^{s+1} = P_{i_1 i_2 N_3 - 1}^{s+1}, x \in \bar{S}_{3h}, \forall (i_1, i_2), s=0,1,\dots, s^*; \quad (5)$$

Итерации выполняются до номера S^* , для которого имеют место неравенства для уравнения неразрывности

$$\left| \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{s^*+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + \sum_{k=1}^3 \left[\bar{\alpha}_k (\rho^n v_k^{s^*+1})_{x_k} + \bar{\beta}_k (\rho^n v_k^{s^*+1})_{\bar{x}_k} \right] \right| \leq \varepsilon, \varepsilon \approx 0, x \in \Omega_h$$

Параметр θ выбирается из интервала $0 < \theta < 0,5$.

Коэффициенты при $P_{i_1 i_2 i_3}^{n+1}$ равны:

$$A^n = \tau_{n+1} \bar{\alpha}_k h_{ki_k+1}^{-2}, x \in S_{kh}, k=1,2,3; \quad (6)$$

$$A^n = 0,5 \sum_{k=1}^3 \left\{ \bar{\alpha}_k (1 - \text{sign}(i_k - N_k + 1,5)) \left[\bar{\alpha}_k h_{ki_k+1}^{-1} (h_{ki_k+1}^{-1} + h_{ki_k}^{-1}) - \bar{\beta}_k h_{ki_k+1}^{-2} \right] + \bar{\alpha}_k (1 + \text{sign}(i_k - N_k + 1,5)) h_{ki_k+1}^{-1} (\bar{\alpha}_k h_{ki_k}^{-1} - \bar{\beta}_k h_{ki_k+1}^{-1}) \right\} + \bar{\beta}_k (1 + \text{sign}(i_k - 1,5)) \left[\bar{\beta}_k h_{ki_k}^{-1} (h_{ki_k+1}^{-1} + h_{ki_k}^{-1}) - \bar{\alpha}_k h_{ki_k}^{-2} \right] + \bar{\beta}_k (1 - \text{sign}(i_k - 1,5)) h_{ki_k}^{-1} (\bar{\beta}_k h_{ki_k+1}^{-1} - \bar{\alpha}_k h_{ki_k}^{-1}) \cdot \tau_{j+1}; \quad (7)$$

$$A^n = \tau_{n+1} \bar{\beta}_k h_{ki_k}^{-2}, x \in \bar{S}_{kh}, k=1,2,3. \quad (8)$$

Краевые условия (8) из §1 для $v_k^{j+1}, k=1,2,3$ реализуются в процессе (1)-(5) по одной из следующих разностных формул:

$$V_{ki_1 i_2 N_3}^{n+1} = V_{ki_1 i_2 N_3 - 1}^{n+1}, V_{ki_1 i_2 N_3}^{n+1} = (4V_{ki_1 i_2 N_3 - 1}^{n+1} - V_{ki_1 i_2 N_3 - 2}^{n+1}) / 3, x \in \bar{S}_{3h}.$$

Вопросы.

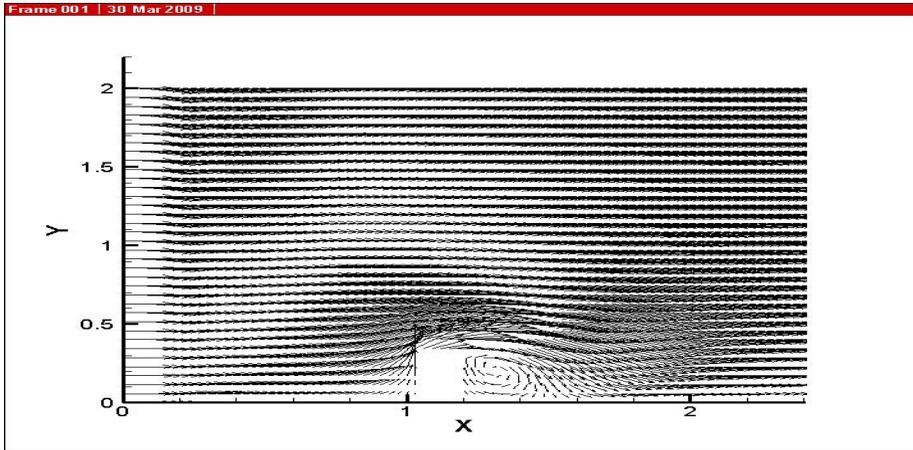
1. Для аппроксимации конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости».
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления давления.

3. Написать в индексном виде схему (21), (22), (23).
4. Применить метод последовательной верхней релаксации.

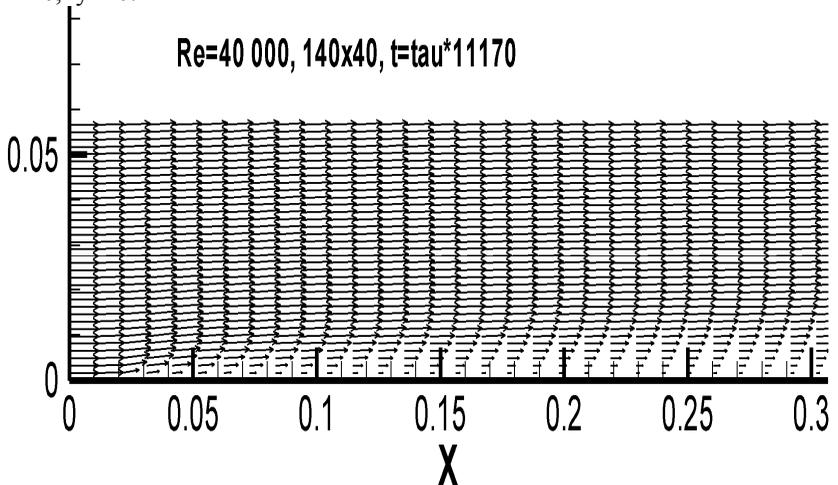
Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2.-М.:»Наука»,1973.
2. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз,1978г., с.764.
3. Джакупов К.Б.. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэро-термодинамики. Алматы, изд-во КазНУ им.аль-Фараби, 2004г.,с.246.
4. Андерсон, Дейл, Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1, 2.- М.: “Мир”, 1982.С.723.
5. Джакупов К.Б.. О новых уравнениях динамики вязкой жидкости //Тезисы докладов междунар. науч. конф. “Пробл. теор. и прикл. механики”, Алматы, Казахстан, 1-2 марта, 2006.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.:»Наука»,1972.
7. Гантмахер Ф.Р..Теория матриц. -М.:»Наука»,1966.
8. Данфорд Н. и Шварц Л.. Линейные операторы.-М: ИЛ,1962.
9. Джакупов К.Б..Лабораторный практикум по вычислительной гидродинамике. Алматы, изд-во КазНУ им.аль- Фараби, 2004г.,с.224.
10. Джакупов К.Б.Циклическая пятиточечная прогонка // Известия АН КазССР.Сер.физ.-мат.н..1977, №1,с.19-24.
- 11.Абрамов А.А., Андреев В.Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений//ЖВММФ, том 3, №2,стр.377.
- 12.Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных уравнений математической физики. Новосибирск, «Сиб.отд. изд-ва Наука»,1967.
- 13.Джакупов К.Б.К исследованию устойчивости в С двуслойных разностных схем метода дробных шагов//Числ.мет.мех. спл.среды. Том 8, №7, Новосибирск-1977.С.33-43.
- 14.Марчук Г.И.Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Сиб.отд. изд-ва Наука»,1967.
- 15.Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач//ЖВММФ,1962, Т.4,№2.

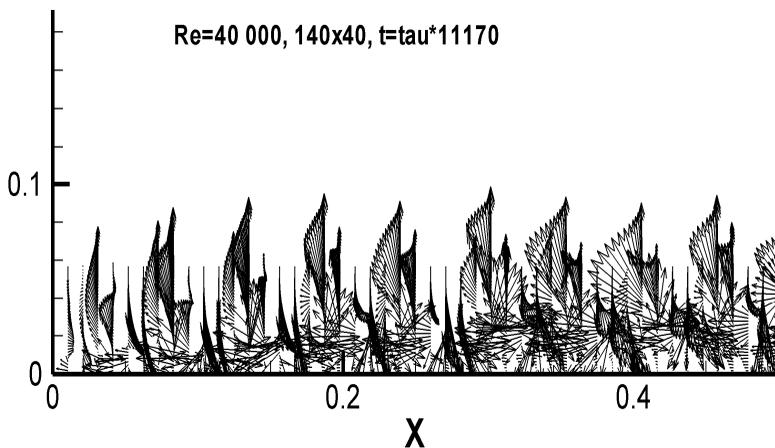
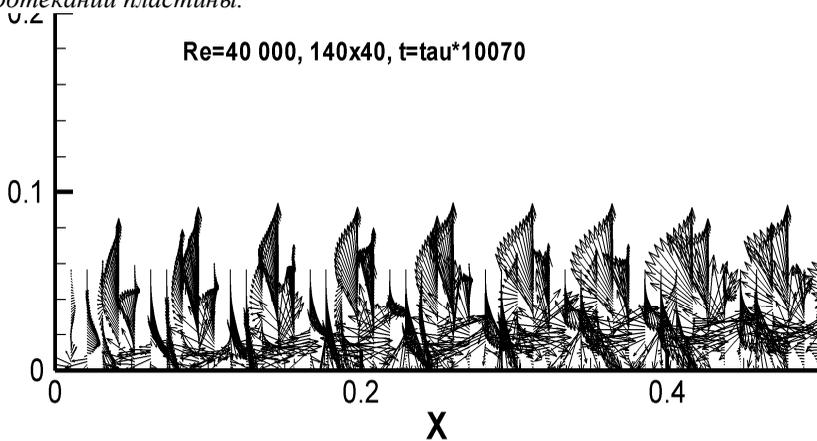
- 16.Гантмахер. Теория матриц. М., Физматгиз,1967г., с.964.
- 17.Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. -Алматы, Типография «К-2»,2009г.,с.270.
- 18.Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайн-функций и ее приложения. - М.: «Мир», 1971.
- 19.Джакупов К.Б. Численный расчет турбулентного обтекания пластины с применением уравнений для пульсаций//Известия СО АН СССР. Сер.техн.н. , вып.1. 1985г.с.61-67.
- 20.Джакупов К.Б. О некоторых разностных схемах для уравнений Навье-Стокса // Чис.мет.мех.спл.ср., ВЦ СО АН СССР, №1,т.2, 1971.С.17-26.
- 21.Джакупов К.Б.Численный расчет ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в кожухе с вращающимися дисками// Известия СО АН СССР, сер.техн.н.вып.1, №3, 1977, с.18-28.
- 22.Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроль В.О. Численное моделирование аэродинамики и теплообмена в топочных и технологических устройствах.- Алма-Ата: изд-во «Наука», 1986.
- 23.Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников.-Спб., 2003.
- 24.Nied D.A., Vejan A. Convection in Porous Media. N. Y. etc: Springer, 1992. 408p.
- 25.Нумеров С.Н. О необходимости учета сил инерции в основных уравнениях теории фильтрации.-В сб.: Вопросы прикладной математики и геометрического моделирования. Ленингр.инж.-стр. ин-т, 1962, с.18-21.
- 26.Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды.- Л.Гидрометеоролог, 1967.С.365.
- 27.Джакупов К.Б., Гончаров А.И. Численное моделирование диффузионного горения в закрученных потоках двухфакельной топки // Сибирский физико-технический журнал. 1991, вып.6/91, с.83-93.



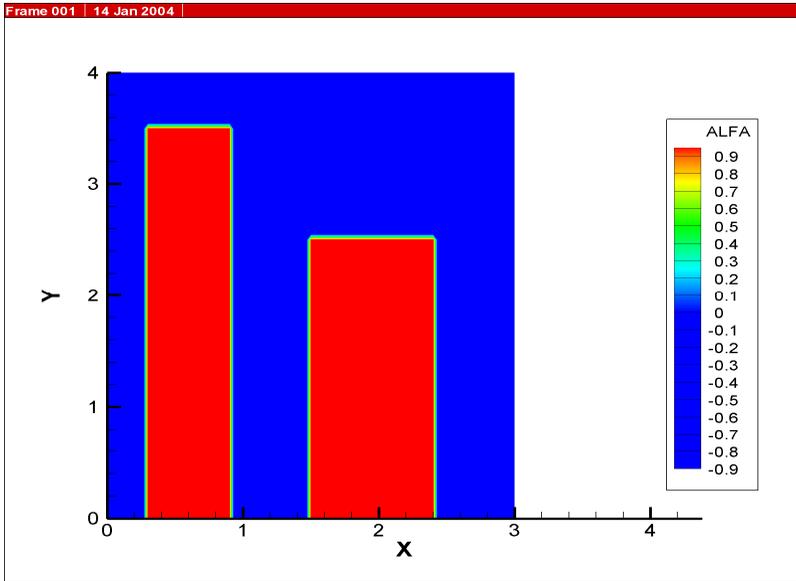
На рисунке приведено симметричное обтекание пластины с выступом. За выступом образуется вихрь, который со временем сносится потоком, трансформируется. При расчете течения около гладкой пластины без выступа в программе надо положить $px1=0$, $px2=0$, $py1=0$.



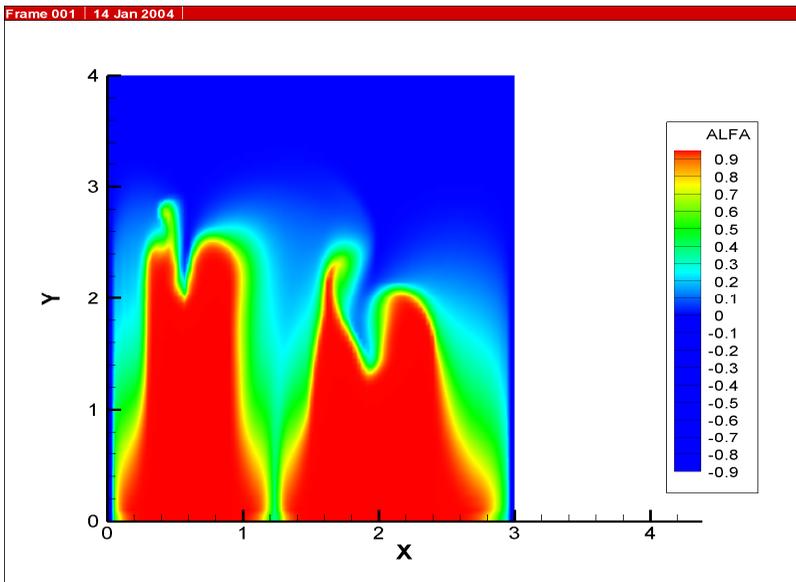
Поле осредненного вектора скорости $\bar{\vec{v}}$ при продольном обтекании пластины.

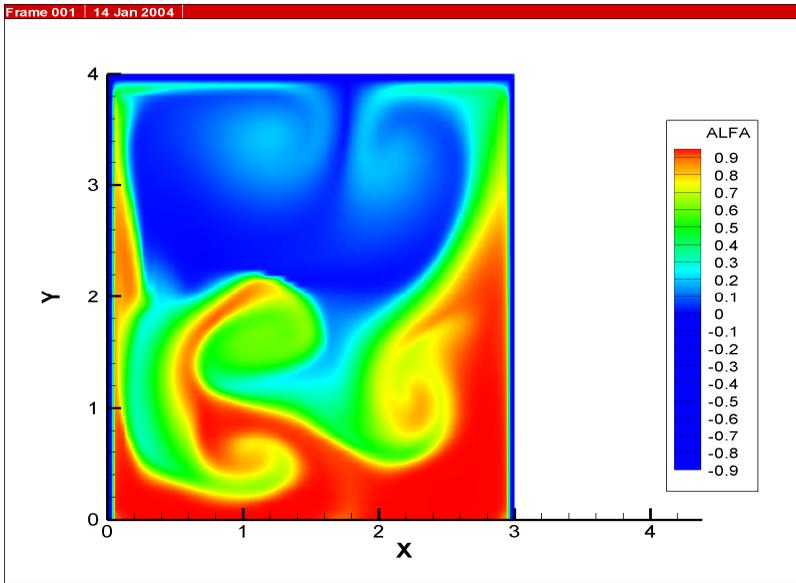


Поля пульсационного вектора скорости \vec{v}' при продольном обтекании пластины в различные моменты времени.

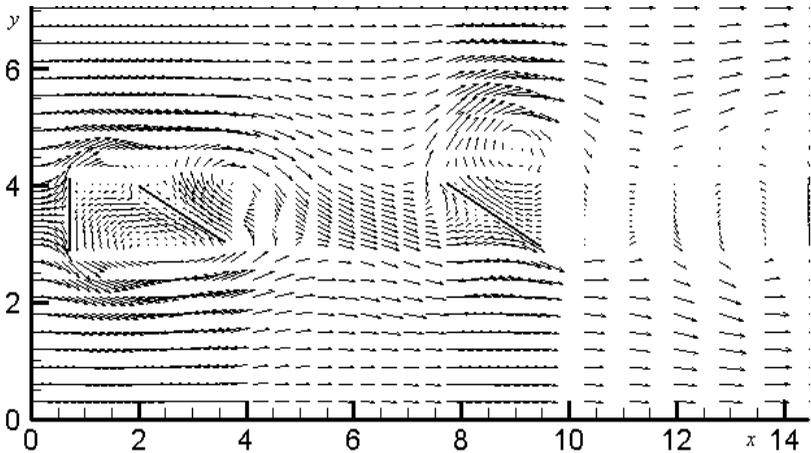


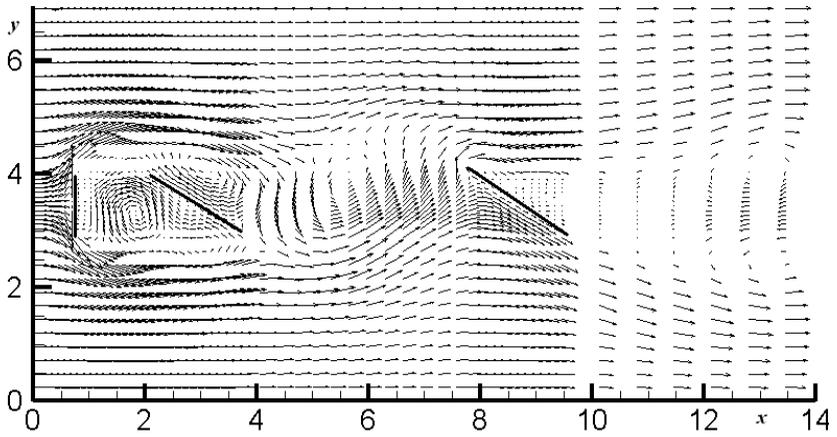
Положение в начальный момент времени двух колонн тяжелой жидкости в атмосфере замкнутого объема.





Изменения в последующие моменты времени форм колонн под действием силы тяжести.





Обтекание трех плотин. Передняя плотина стоит перпендикулярно, две плотины за ней направлены под углом к направлению потока. Сетка 250×150 , $Re = 30000$, $\tau_{n+1} = 0.001, \forall n$.
 Верхняя картина поля скорости $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$ соответствует моменту времени $t_{50500} = 50500\tau_{n+1}$, нижняя - времени $t_{10000} = 10000\tau_{n+1}$.



Джакупов Кенес Бажкенович в 1966г. окончил с отличием механико-математический факультет Томского государственного университета им.В.В.Куйбышева. С 1966г. по 1969г. аспирант ВЦ СОАН СССР Академгородок г.Новосибирск. Защитил в 1970г. кандидатскую, в 1990г.докторскую диссертации в Институте теплофизики им. С.С.Кутателадзе СОАН СССР. Автор 5 монографий, 9 учебных пособий и около 100 работ в области механики жидкости и газа и вычислительной математики. Профессор механики, доктор физико-математических наук. С 1969г. работает на механико-математическом факультете Казахского Национального Университета им. аль-Фараби.

E-mail: jakupovKB@mail.ru