

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
Учебное пособие

Томск 2014

Предисловие

В учебном пособии рассматриваются элементы теории разностных схем и численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Вводятся понятия сетки, сеточной функции, разностной схемы, аппроксимации, устойчивости и сходимости решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи. Элементы теории разностных схем применяются затем к созданию одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши для ОДУ первого порядка и систем ОДУ. Изучаются два подхода к исследованию устойчивости численных методов.

Излагаемый материал иллюстрируется множеством примеров. В конце каждой главы дается список литературы, варианты заданий для самостоятельной работы и перечень вопросов для самоконтроля.

Учебное пособие полезно студентам-бакалаврам, магистрантам и аспирантам, изучающим разностные схемы, а также специалистам, желающим повысить свою квалификацию.

Содержание

Предисловие

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1.1. Основные понятия теории разностных схем

1.1.1. Сетки и сеточные функции

1.1.2. Случай равномерной сетки на плоскости

1.1.3. Случай сетки в двумерной области

1.1.4. Понятие сходимости разностной схемы

1.1.5. Об аппроксимации дифференциальной
краевой задачи разностной

1.1.6. Об устойчивости разностной схемы

1.1.7. Связь между аппроксимацией,
устойчивостью и сходимостью

1.1.8. О выборе норм

1.2. О методах построения разностных схем

1.2.1. Метод неопределённых коэффициентов

1.2.2. Метод полиномиальной аппроксимации

1.2.3. Метод конечных разностей

1.2.3.1. Выбор формул численного дифференцирования

1.2.3.2. Определение порядка аппроксимации
дифференциальной задачи разностной

1.2.3.3. Устойчивость разностной схемы и сходимость
решения разностной задачи к решению

дифференциальной. Вопросы разрешимости разностной
задачи

1.3. Исследование устойчивости разностных схем

1.3.1. Достаточный признак устойчивости разностных
схем решения задачи Коши

1.3.2. Каноническая форма записи разностной схемы

1.3.3. Спектральный признак устойчивости

1.4. Решение примеров

1.5. Лабораторные задания

Литература

Вопросы для самоконтроля

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Общие замечания

2.2. Метод разложения решения в ряд Тейлора

2.3. Метод Пикара

2.4. Метод Эйлера

2.5. Методы Рунге-Кутты

2.6. Многошаговые методы решения задачи Коши

2.6.1. Экстраполяционные формулы ($S = 0$)

2.6.2. Интерполяционные формулы ($S = 1$)

2.6.3. Многошаговые правила с забеганием вперед ($S = 2$)

2.6.4. Метод Милна

2.6.5. Два подхода к исследованию устойчивости одношаговых и многошаговых методов

2.7. Лабораторные задания

Литература

Вопросы для самоконтроля

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1.1. Основные понятия теории разностных схем

Значительная часть проблем, с которыми имеет дело вычислительная математика, представляет собой различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Так, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи химической кинетики, электрических цепей, движение систем взаимодействующих материальных точек и другие задачи физики, химии, техники. К дифференциальным уравнениям в частных производных приводятся задачи математической физики, гидродинамики, акустики и других областей знаний.

Все методы решения дифференциальных уравнений можно условно разбить на две группы: *аналитические* и *численные*. В свою очередь аналитические методы подразделяются на точные и приближенные. *Точные* методы позволяют выразить решение дифференциальных уравнений через элементарные функции (в аналитическом виде). *Приближенными* называются методы, в которых решение получается как предел некоторой последовательности, члены которой выражаются через элементарные функции. *Численные* методы не позволяют найти точное решение дифференциальных уравнений в аналитической форме [1]. С их помощью получается таблица приближенных (иногда точных) значений искомого решения в некоторых точках рассматриваемой области решения, именуемых сеткой. В силу этого численные методы называют иначе *разностными методами* или *методами сеток*. Численные методы применимы к широкому классу дифференциальных уравнений и всем типам краевых задач для них.

С появлением быстродействующих ЭВМ эти методы стали одним из основных способов решения конкретных практических задач вычислительной математики. Однако, следует отметить, что численные методы можно применять только к *хорошо обусловленным* дифференциальным задачам. Другими словами, к задачам, в которых малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям в решении задачи.

Поясним сказанное на примере [2, с. 58-59].

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - 10y' - 11y = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Решением данной дифференциальной задачи является функция

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где λ_1, λ_2 есть корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 10\lambda - 11 = 0$$

и равны соответственно

$$\lambda_1 = 11; \lambda_2 = -1.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий, что приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 11C_1 - C_2 = -1, \end{cases}$$

откуда следует

$$C_1 = 0; C_2 = 1.$$

Таким образом, решением поставленной дифференциальной задачи будет функция

$$y(x) = e^{-x},$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в искомое уравнение.

Теперь увеличим первое начальное условие на малую величину $\varepsilon > 0$, т.е. рассмотрим дифференциальную задачу

$$\begin{cases} y'' - 10y' - 11y = 0 \\ y(0) = 1 + \varepsilon, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Тогда константы C_1, C_2 будут определяться из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 + \varepsilon, \\ 11C_1 - C_2 = -1 \end{cases}$$

и примут значения

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{12}; C_2 = 1 + \frac{11}{12}\varepsilon.$$

Решением дифференциальной задачи с измененными начальными условиями будет функция

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{12} e^{11x} + \left(1 + \frac{11}{12} \varepsilon\right) e^{-x},$$

которая при любом $\varepsilon > 0$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, чему способствует слагаемое $\frac{\varepsilon}{12} e^{11x}$. Изобразим на рис. 1.1 поведение полученных двух решений.

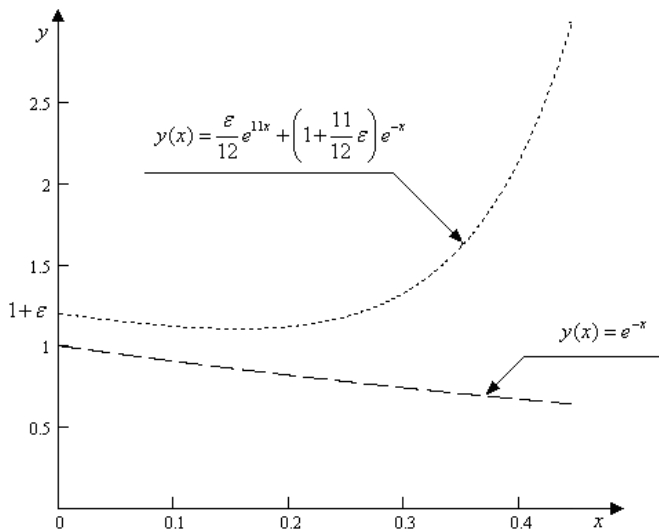


Рис.1.1

Поведение решений задачи при мало изменяющихся начальных условиях (при значении $\varepsilon = 0.2$)

Таким образом, сколь угодно малые изменения в начальных условиях вызвали сколь угодно большие изменения решения при $x \rightarrow \infty$, что означает *плохую обусловленность* поставленной дифференциальной задачи и неустойчивость решения $y(x)$.

Отметим, что *плохо обусловленные* дифференциальные задачи крайне сложно решать численными методами, т.к. ошибки округлений и погрешность метода оказывают такое же влияние на решение, как и изменение начальных условий.

В качестве упражнения рекомендуется с помощью замены

$$y' = z$$

свести поставленную задачу к эквивалентной системе первого порядка

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = 10z + 11y \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, z(0) = -1$$

и решить эту систему численно любым методом (например, методом Эйлера [2, с. 32-36]), а затем проанализировать полученные результаты.

1.1.1. Сетки и сеточные функции

Понятия *сетки* и *сеточной функции* возникают в теории разностных схем в связи с изучением численных методов решения краевых задач математической физики. Для построения численного метода необходимо написать разностную схему, приближенно описывающую дифференциальное уравнение (или систему). Этот этап связан с заменой области непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения и с заменой дифференциального оператора некоторым его разностным аналогом, кроме того, записывается разностная аппроксимация для начальных и граничных условий. Результатом этой процедуры является алгебраическая система уравнений [1] или система разностных уравнений [3]. Численное решение краевой задачи для исходного линейного дифференциального уравнения сводится к решению полученной алгебраической системы.

Отметим, что численные методы дают ограниченную и приближенную информацию о решении, но зато являются универсальными.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.1)$$

$$y(x_0) = a, \quad (1.2)$$

где

$$x \in [x_0, X].$$

Предполагается, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (1.1)-(1.2) [4].

Область непрерывного изменения аргумента $x \in [x_0, X]$ заменим дискретным множеством точек $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, N$, где $h > 0$ – малое фиксированное число. Такое множество точек называется *сеткой*, отдельные точки сетки называются её *узлами* и h – *шагом сетки*. Функция, значения которой определяются в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Итак, область непрерывного изменения аргумента заменена сеткой или областью дискретного изменения аргумента.

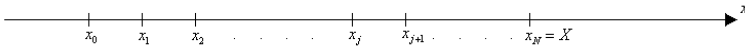


Рис. 1.2

Регулярная сетка на промежутке

В вышеприведенном примере была рассмотрена равномерная сетка на отрезке $[x_0, X]$, который разбивался на N равных частей. Шаг сетки $h = x_{i+1} - x_i = (X - x_0) / N$.

Множество всех узлов сетки будем обозначать $\omega_h = \{x_j, x_j = x_0 + jh, j = 1, 2, \dots, N\}$. Если в это множество включить граничную точку x_0 , то будем его обозначать

$$\overline{\omega}_h = \{x_j, x_j = x_0 + jh, j = \overline{0, N}\}.$$

На отрезке $[x_0, X]$ вместо функции $y(x)$ непрерывного аргумента будем рассматривать функцию $y_j, j = \overline{0, N}$ дискретного аргумента.

Отметим, что значения сеточной функции вычисляются в узлах сетки x_j и сама функция зависит от шага сетки h как от параметра.

Если в качестве сетки рассмотреть неравномерную сетку на отрезке, то в этом случае узлы будут расположены произвольным образом:

$$\hat{\omega}_h = \{x_j | j = \overline{1, N}; x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = X\}.$$

Если добавить к этому множеству узел x_0 , то получим неравномерную сетку на отрезке $[x_0, X]$: $\hat{\overline{\omega}}_h [x_0, X]$.

Заметим, что шаг сетки $h_j = x_j - x_{j-1}$ в этом случае будет зависеть от номера узла j , т.е. является сеточной функцией.

1.1.2. Случай равномерной сетки на плоскости

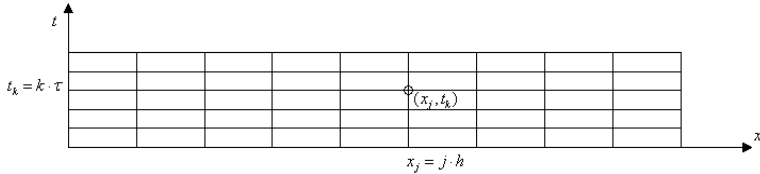


Рис. 1.3

Равномерная сетка на плоскости (x, t)

Рассматривается некоторое множество функций $y(x, t)$ двух переменных x, t . Пусть область определения этих функций представляет собой, например, прямоугольник (рис. 1.3):

$$\bar{G} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Разбиваем отрезки $[0, 1]$ и $[0, T]$ оси Ox и Ot соответственно на N и M равных частей, причем $h = 1/N$ и $\tau = T/M$. Через точки деления проводятся прямые, параллельные осям Ox и Ot соответственно. Точки пересечения этих прямых образуют узлы (x_j, t_k) сетки

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_j, t_k) \mid x_j = jh, t_k = k\tau, h = 1/N, \tau = T/M; j = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}.$$

Соседними узлами полученной сетки называют узлы, расположенные на одной и той же прямой (горизонтальной и вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки (h или τ).

1.1.3. Случай сетки в двумерной области

Пусть задана область G сложной формы с границей Γ на плоскости $x = (x_1, x_2)$. Покроем область G некоторой сеточной

областью G_h . Последняя получается путем проведения прямых $x_1^{(j_1)} = j_1 h_1, j_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1 > 0; x_2^{(j_2)} = j_2 h_2, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_2 > 0$.

Пересечения указанных прямых дают узлы сетки $(j_1 h_1, j_2 h_2); j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на плоскости (x_1, x_2) . Заметим, что сетка регулярна как по направлению Ox_1 , так и Ox_2 (рис. 1.4).

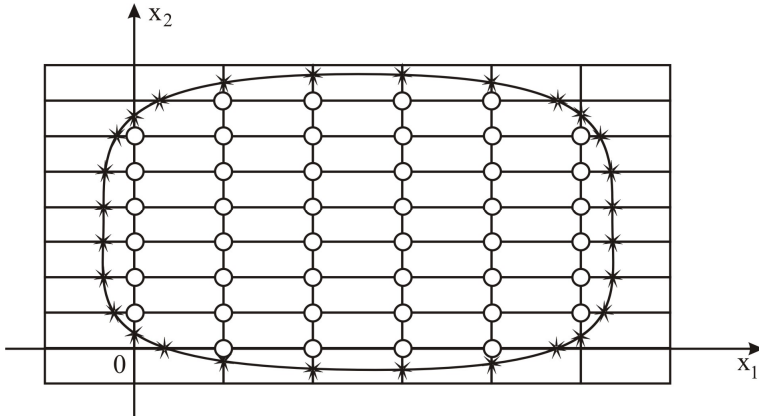


Рис. 1.4

Случай задания сетки в двумерной области

Среди узлов сеточной области будут узлы 2-х типов: внутренние ω_h и граничные γ_h .

Те узлы $(j_1 h_1, j_2 h_2)$, которые попали внутрь области G , назовем *внутренними*, а узлы, являющиеся точками пересечения прямых

$$x_1^{(j_1)} = j_1 h_1, x_2^{(j_2)} = j_2 h_2; j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

с границей Γ , назовем *граничными узлами* (на рис. 1.4 граничные узлы обозначены значком \times , а внутренние – o).

Из рис. 1.4 следует, что сетка на плоскости (x_1, x_2) равномерна по x_1 и x_2 . Однако, в целом для области \bar{G} сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ будет неравномерной вблизи границы.

Вернемся к ранее поставленной задаче (1.1)-(1.2). Заменим область непрерывного изменения аргумента $x \geq 0$ дискретным

множеством точек $x_j = x_0 + jh$, $j = \overline{0, N}$, $h = (X - x_0) / N$. Вместо функции $y(x)$ рассмотрим таблицу x_j, y_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N$.

Запишем уравнение (1.1) в произвольном внутреннем узле

$$x_j \in \omega_h = \left\{ x_j \mid x_j = x_0 + jh, j = \overline{0, N}; h = (X - x_0) / N \right\} :$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)), j = \overline{0, N-1}. \quad (1.3)$$

По определению производной

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}.$$

Заменяя в (1.3) производную $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$ конечно-разностным

отношением, получим вместо дифференциального уравнения (1.3) разностное уравнение вида:

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} \approx f(x_j, y(x_j)), j = \overline{0, N-1}. \quad (1.4)$$

Сеточную функцию, удовлетворяющую (1.4), будем обозначать y_j .

В результате будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1}; \\ y_0 = a. \end{cases} \quad (1.5)$$

Разностная задача (1.5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Разрешая j -тое разностное уравнение в (1.5) относительно y_{j+1} , получим:

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1}; \\ y_0 = a. \end{cases} \quad (1.6)$$

Построение вычислительного алгоритма завершено. Зная y_0 , определяем y_1 из (1.6) при значении $j = 0$:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

С учетом полученного значения y_1 легко определить

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

и т.д. Зная y_{N-1} , можно вычислить y_N по формуле

$$y_N = y_{N-1} + h \cdot f(x_{N-1}, y_{N-1}).$$

Заметим, что при построении численного алгоритма пренебрегли пределом при $h \rightarrow 0$ и тем самым допустили некоторую ошибку, называемую *погрешностью аппроксимации* (производной $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$ конечно-разностным отношением).

Алгоритм оценки погрешности аппроксимации будет изложен позже, а пока отметим, что с помощью численного метода (1.6), называемого *методом Эйлера*, определяется таблица значений решения $y(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, $y_0 = a$. При $h \rightarrow 0$, т.е. при сгущении узлов сетки, решение y_j должно сходиться к решению исходной задачи (1.1)-(1.2). При этом обе функции, и непрерывного аргумента ($y(x_j)$) и дискретного аргумента (y_j), рассматриваются как функции дискретного аргумента или сеточные функции.

Если $y(x)$ непрерывная функция, то ей ставится в соответствие сеточная функция $y(x_j)$ или $[y]_h$. Если же $y(x)$ терпит разрыв, то таблицей её значений на $[x_0, X]$ можно считать сеточную функцию

$$[y]_h = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(\xi) d\xi.$$

Условимся, что $y(x)$ – непрерывная функция, а $[y]_h$ – сеточная функция, совпадающая с функцией $y(x)$ в точках сетки.

1.1.4. Понятие сходимости разностной схемы

В связи с понятием разностной схемы рассмотрим линейное нормированное пространство функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_h$. Будем обозначать его U_h [3].

Норма может быть определена по-разному. Например, можно рассмотреть разностный аналог нормы пространства C :

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|. \quad (1.7)$$

Часто используется норма, определяемая равенством

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} = \left(\sum_{j=0}^N h \cdot |y_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Норма (1.8) эквивалентна норме

$$\|y(x)\| = \left(\int_{x_0}^X |y(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

для функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[x_0, X]$.

Можно также принять за норму

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} = \sup_{0 \leq j \leq N} |y_j|. \quad (1.9)$$

Пусть даны две произвольные сеточные функции $u^{(h)}$ и $v^{(h)}$ из пространства U_h .

Определение 1. Мерой отклонения этих функций друг от друга считается норма их разности, т.е.

$$\|u^{(h)} - v^{(h)}\|_{U_h}.$$

Перепишем исходную дифференциальную задачу в, так называемой, операторной форме [3, с. 82-84, 88-89]

$$Ly = f, \quad (1.10)$$

где

$$Ly \equiv \begin{cases} \frac{dy}{dx}, & x_0 \leq x \leq X, \\ y(x_0), \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} f(x, y(x)), & x_0 \leq x \leq X, \\ a. \end{cases}$$

Запишем в операторной форме соответствующую разностную задачу, аппроксимирующую (1.10):

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.11)$$

где

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h}, & j = \overline{0, N-1}; \\ y_0; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_j, y_j), & j = \overline{0, N-1}; \\ a. & \end{cases}$$

Заметим, что любую краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных можно записать в операторной форме в виде (1.10). Аналогичным образом можно записать в виде (1.11) соответствующую разностную краевую задачу. С учетом сказанного, введем ряд важных определений, используемых в теории разностных схем.

Предполагаем, что при любом достаточно малом h решение $y^{(h)}$ задачи (1.11) существует и принадлежит пространству U_h .

Определение 2. Говорят, что решение $y^{(h)}$ разностной краевой задачи (1.11) при измельчении шага сетки *сходится* к решению y дифференциальной краевой задачи (1.10), если

$$\| [y]_h - y^{(h)} \|_{U_h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Если выполнено неравенство

$$\| [y]_h - y^{(h)} \|_{U_h} \leq C \cdot h^k, \quad (1.13)$$

где $C > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h , то говорят, что имеет место *сходимость порядка k относительно h* или, что разностная схема имеет k -й порядок точности.

Вопрос проверки сходимости разбивается на два более простых вопроса:

- 1) проверка аппроксимации задачи (1.10) задачей (1.11);
- 2) является ли устойчивой задача (1.11)?

Ответ на эти два вопроса требует введения математически строгих понятий *аппроксимации* и *устойчивости*.

1.1.5. Об аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной

Предположим, что разностная задача (1.11) имеет единственное решение $y^{(h)} \in U_h$. Если в (1.11) вместо функции $y^{(h)}$ подставить сеточную функцию $[y]_h \in U_h$ и при этом скажется, что равенство (1.11) будет точно выполнено, то ввиду единственности решения

(1.11) следует, что $[y]_h = y^{(h)}$. Описанная ситуация является идеальной с точки зрения сходимости. Как правило, систему разностных уравнений трудно построить так, чтобы $[y]_h$ ей точно удовлетворяла. Подставляя в (1.11) $[y]_h$, получаем некоторую невязку

$$L_h[y]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}. \quad (1.14)$$

За определение *аппроксимации* принимается стремление невязки $\delta f^{(h)}$ к нулю при шаге $h \rightarrow 0$.

Поясним понятие невязки на примере разностной задачи (1.11).

Невязка возникает за счет аппроксимации производной $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$

конечно-разностным отношением

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} \approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \quad (1.15)$$

Применим формулу Тейлора к функции $y(x_j + h)$ в окрестности узла $x_j \in \omega_h$, предполагая, что $y(x) \in C^2[x_0, X]$:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} h + \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} \frac{h^2}{2!},$$

где $\bar{x} = x_j + \theta_1 \cdot h$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

Подставляя разложение $y(x_j + h)$ в (1.15), получим:

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{h}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (1.16)$$

Поэтому выражение

$$L_h [y]_h \equiv \begin{cases} \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}, & j = \overline{0, N-1}, \\ y(x_0) \end{cases}$$

можно переписать следующим образом:

$$L_h [y]_h \equiv \begin{cases} f(x_j, y(x_j)) + \frac{h}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}}, & j = \overline{0, N-1}; \\ a. \end{cases}$$

Или

$$L_h[y]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

где

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} h \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=\bar{x}}, \\ 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Будем считать, что $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$, заданные с помощью формул (1.11) и (1.17), принадлежат линейному нормированному пространству F_h . Под величиной невязки понимаем $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$.

Определение 3. Будем говорить, что разностная схема $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $Ly = f$ на решении y , если $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \rightarrow 0$ при шаге $h \rightarrow 0$. Если имеет место неравенство

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_1 \cdot h^k, \quad (1.18)$$

где $C_1 > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, то будем говорить, что имеет место *аппроксимация порядка h^k* или порядка k относительно шага h .

Если норму пространства F_h определить по формуле (1.7), то из (1.17) будем иметь:

$$\|\delta f^{(h)}\| = \max_{0 \leq j \leq N} \left\{ h \left[\frac{1}{2} \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| \right]_{x=x_j}, \right. \\ \left. 0. \right\}$$

Учитывая предположение относительно $y(x)$, имеем, что $\frac{d^2 y}{dx^2}$ будет по модулю ограничена некоторой константой C_2 .

Тогда

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq h \cdot \frac{1}{2} \cdot C_2 = h \cdot C_3.$$

Согласно определению 3, имеет место аппроксимация порядка 1 относительно величины h .

Начальное условие при замене дифференциальной задачи разностной аппроксимируется точно, т.к. решение разностной задачи должно удовлетворять тому же самому условию, что и $y(x)$.

Заметим, что если рассматривается краевая задача 2-го или 3-го рода, когда в граничном условии содержится производная от решения, при переходе к соответствующей разностной задаче возникает погрешность аппроксимации граничных условий, влияющая на порядок аппроксимации разностной задачи.

1.1.6. Об устойчивости разностной схемы

Введем очень важное в теории разностных схем понятие *устойчивости* [1, с. 106-107] в случае, когда L_h - не обязательно линейный оператор.

Определение 4. Разностная схема (1.11) называется *устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\varepsilon^{(h)} \in F_h$, $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} < \delta$, разностная задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \quad (1.19)$$

полученная из задачи (1.11) добавлением к правой части возмущения $\varepsilon^{(h)}$, имеет только одно решение $z^{(h)}$, причем, это решение отклоняется от решения $y^{(h)}$ невозмущенной задачи (1.11) на сеточную функцию $z^{(h)} - y^{(h)}$, удовлетворяющую оценке:

$$\|z^{(h)} - y^{(h)}\|_{U_h} \leq C \cdot \|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h}, \quad (1.20)$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h .

В частности, неравенство (1.20) означает, что малое возмущение $\varepsilon^{(h)}$ правой части разностной схемы (1.11) вызывает равномерно малое относительно h возмущение $z^{(h)} - y^{(h)}$ решения.

Если в (1.11) оператор L_h является линейным, то приведенное определение устойчивости равносильно следующему.

Определение 5. Разностная схема (1.11) с линейным оператором L_h называется *устойчивой*, если для любого $f^{(h)} \in F_h$ уравнение (1.11) имеет единственное решение $y^{(h)} \in U_h$, причем,

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} \leq C \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h .

Доказательство эквивалентности приведенных выше определений устойчивости в случае линейного оператора L_h приведено в [1, с. 107-108].

1.1.7. Связь между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью

Взаимосвязь между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью устанавливается с помощью теоремы, которая в зарубежных источниках носит название теоремы Лакса [5, с.54 -57].

Приведем формулировку и доказательство этой теоремы [1, с.109].

Теорема 1. Пусть разностная схема $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $Ly = f$ на решении y с порядком h^k и устойчива. Тогда решение $y^{(h)}$ разностной задачи $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ сходится к решению $[y]_h$, причем справедлива следующая оценка:

$$\| [y]_h - y^{(h)} \|_{U_h} \leq (C \cdot C_1) h^k, \quad (1.21)$$

где C и C_1 числа (константы), входящие в оценки (1.20) и (1.18).

Доказательство. Полагаем $\varepsilon^{(h)} \equiv \delta f^{(h)}$, $[y]_h \equiv z^{(h)}$, тогда оценка (1.20) может быть записана следующим образом:

$$\| [y]_h - y^{(h)} \|_{U_h} \leq C \cdot \| \delta f^{(h)} \|_{F_h}.$$

Учитывая (1.18), сразу получим требуемое неравенство (1.21).

Теорема доказана

Устойчивость есть внутреннее свойство самой разностной схемы и никоим образом не зависит от исходной дифференциальной задачи.

1.1.8. О выборе норм

Основные понятия теории разностных схем такие, как аппроксимация, устойчивость и сходимости, имеют смысл, если в пространствах сеточных функций U_h, F_h каким-либо способом введены нормы. Какова степень произвола при выборе нормы в пространствах U_h и F_h ? Вначале рассмотрим $\| \bullet \|_{U_h}$.

В рассмотренном ранее примере при оценке порядка погрешности аппроксимации использовалась норма, введенная по формуле (1.7):

$$\| y^{(h)} \|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|, \quad (1.22)$$

причем, максимум берется по всем точкам сетки $\overline{\omega}_h$, на которой определена сеточная функция $y^{(h)} \in U_h$.

Выбор нормы в пространстве U_h осуществляется таким образом, чтобы при $h \rightarrow 0$ эта норма переходила бы в соответствующую норму функций, заданных на всем отрезке. Другими словами, должно выполняться равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[y]\|_{U_h} = \|y\|_U, \quad (1.23)$$

где $\|y\|_U$ – норма в пространстве функций, определенных на отрезке $[x_0, X]$, которому принадлежит решение $y(x)$ задачи (1.10).

Если в качестве U взять пространство непрерывных функций C , а сеточную функцию $[y]_h$ определить как совпадающую с $y(x)$ в узлах сетки, то норма (1.22) будет удовлетворять условию (1.23).

В качестве нормы в пространстве U_h , удовлетворяющей условию (1.23), можно выбрать следующую норму:

$$\|y^{(h)}\| = \sqrt{h \cdot \sum_j |y_j|^2}. \quad (1.24)$$

При этом за пространство U принимается пространство непрерывных функций, определенных на $[0,1]$ (т.к. к этому промежутку можно перейти с помощью соответствующей замены переменной), с нормой

$$\|y\| = \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx},$$

а сеточная функция $[y]_h$ определяется как совпадающая с функцией $y(x)$ в узлах сетки.

Если $y(x)$ – разрывная функция, но интегрируема с квадратом, то U представляет собой пространство функций с интегрируемым квадратом и

$$\|y\| = \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx},$$

но при этом $[y(x)]_h \neq y(x_j)$, а определяется по формуле

$$[y(x)]_h = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} y(x) dx .$$

Тогда для разрывной функции $y(x)$ также справедливо (1.23), т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[y(x)]_h\|_{U_h} = \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx} .$$

Очевидно, что из равномерной сходимости, т.е. сходимости в норме (1.22), следует сходимость в среднем, т.е. в норме (1.24).

Остановимся теперь на вопросе о выборе нормы в пространстве F_h , которому принадлежит правая часть разностной схемы (1.11).

Для простоты изложения предполагаем, что L_h - линейный оператор [3, с. 119]. Отметим, что не всегда можно выбрать норму так, чтобы аппроксимация и устойчивость имели место.

В [3, с. 120] приводится соображение общего характера, помогающее правильно выбрать нормы в линейном пространстве F_h . Рекомендуется учитывать характер непрерывной зависимости решения дифференциальной краевой задачи $Ly = f$, которую аппроксимирует разностная схема $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$, от правой части f при выборе нормы $\|\bullet\|_{F_h}$. Приведенная рекомендация иллюстрируется на двух примерах в [3, с. 120-122].

Отметим, что методы построения разностных схем, необходимый и достаточный признаки устойчивости разностной схемы по начальным данным, а также примеры, иллюстрирующие эту часть теории, рассматриваются далее.

1.2. О методах построения разностных схем

Построение разностных схем осуществляется с учетом ряда требований, предъявляемых к разностной схеме. Необходимо, чтобы разностная схема удовлетворяла следующим условиям:

- 1) аппроксимировала с более высоким порядком исходную дифференциальную задачу;
- 2) была устойчивой;
- 3) обладала свойством консервативности, т.е., чтобы на сетке выполнялись разностные аналоги законов сохранения [1, с. 111-114];

- 4) была экономичной;
- 5) была легко разрешимой и т.д.

Нельзя построить разностную схему, удовлетворяющую одновременно всем перечисленным требованиям. Некоторые из них вступают в противоречие друг с другом и приходится удовлетворять наиболее важным требованиям, а от каких-то нужно отказаться в угоду более существенным.

Остановимся на некоторых методах построения разностных схем [1 - 6].

1.2.1. Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов рассмотрим на примере задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & x_0 \leq x \leq X, \\ y(x_0) = a. \end{cases} \quad (1.25)$$

Для численного решения задачи (1.25) ранее методом конечных разностей была построена разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), & j = \overline{0, N-1}, \\ y_0 = a. \end{cases} \quad (1.26)$$

Эта схема связывает значения искомой функции $y(x)$ в двух узлах x_j и x_{j+1} .

Построим разностную схему (1.26) методом неопределённых коэффициентов. Для этого разностное уравнение запишем в следующем виде:

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_j + a_1 y_{j+1} = f_j, \quad (1.27)$$

где a_0 и a_1 – неопределённые коэффициенты. Постараемся подобрать их таким образом, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$L_h [y] \Big|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) + O(h^2). \quad (1.28)$$

Вспользуемся формулой Тейлора, предполагая, что $y(x) \in C^2 [x_0, X]$:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=\tilde{x}}, \quad (1.29)$$

где $\tilde{x} = x_j + \theta_1 h$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

Подставляя (1.29) в левую часть равенства (1.28), получим:

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = a_0 y(x_j) + a_1 \left\{ y(x_j) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} + O(h^2) \right\}. \quad (1.30)$$

Определим коэффициенты a_0 , a_1 так, чтобы выполнялось условие аппроксимации (1.28). Вначале сгруппируем слагаемые в правой части равенства (1.30).

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = (a_0 + a_1) y(x_j) + a_1 h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} + O(h^2) = f(x_j, y(x_j)). \quad (1.31)$$

Из соотношения (1.31) следует, что для выполнения условия аппроксимации необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ a_1 h = 1. \end{cases}$$

Имеем систему двух линейных алгебраических уравнений, которая, очевидно, допускает единственное решение:

$$a_0 = -\frac{1}{h}, a_1 = \frac{1}{h}.$$

В результате получается разностная схема

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f_j, \quad j = \overline{0, N-1},$$

аналогичная ранее рассмотренной схеме (1.26).

Для построения разностной схемы, связывающей значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_{j-1} и x_{j+1} , методом неопределенных коэффициентов, повторим выше приведенную процедуру.

Имеем

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_{j-1} + a_1 y_{j+1} = f_j. \quad (1.32)$$

Определим неизвестные коэффициенты a_0 , a_1 так, чтобы имело место равенство

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) + O(h^2). \quad (1.33)$$

Используя формулу Тейлора, получим

$$y(x_j - h) = y(x_j) - h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=\tilde{x}}, \quad (1.34)$$

$$y(x_j + h) = y(x_j) + h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=\tilde{x}}, \quad (1.35)$$

где $\tilde{x} = x_j + \theta_1 h$, $\tilde{x} = x_j + \theta_2 h$, $\theta_1 \in (-1, 0)$, $\theta_2 \in (0, 1)$.

Подставляя (1.34) и (1.35) в левую часть равенства (1.33), будем иметь:

$$L_n[y]_h \Big|_{x=x_j} \equiv (a_0 + a_1)y(x_j) + (-a_0 h + a_1 h) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_j} + O(h^2) = f(x_j, y(x_j)). \quad (1.36)$$

Для выполнения условия аппроксимации (1.36) необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ (-a_0 + a_1)h = 1. \end{cases}$$

Из системы имеем, что $a_0 = -\frac{1}{2h}$, $a_1 = \frac{1}{2h}$. Подставляя полученные значения a_0 , a_1 в (1.32), запишем разностную схему:

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = f_j, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (1.37)$$

Отметим, что в построенной разностной схеме (1.37) используется *центральная разность*. В ранее рассмотренной схеме применялась *правая пространственная разность*.

Аналогичным образом можно построить разностную схему с *левой пространственной разностью* вида:

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h} = f_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.38)$$

Отметим, что в общем случае разностная схема может иметь шаблон, в котором узлы могут быть расположены произвольным образом друг относительно друга. При этом число неопределенных коэффициентов должно совпадать с количеством узлов. Более подробно применение данного метода к различным типам уравнений в частных производных рассматривается в [1, с. 191-200].

1.2.2. Метод полиномиальной аппроксимации

Рассматриваемый метод основан на применении гладкой функции со свободными параметрами [2], [7] для нахождения производных по экспериментальным данным. В качестве такой функции обычно используются полиномы.

Проиллюстрируем указанный метод для случая, когда в узлах x_{j-1}, x_j, x_{j+1} заданы значения функции y_{j-1}, y_j, y_{j+1} . Проведем аппроксимацию функции многочленом второй степени

$$y(x) = a + bx + cx^2, \quad (1.39)$$

причем, за начало координат $x = 0$ примем точку x_j . Тогда $x_{j-1} = -h, x_{j+1} = h$. Для определения a, b, c воспользуемся значениями y_{j-1}, y_j, y_{j+1} . Имеем:

$$y_{j-1} = a + bx_{j-1} + cx_{j-1}^2,$$

$$y_j = a + bx_j + cx_j^2,$$

$$y_{j+1} = a + bx_{j+1} + cx_{j+1}^2$$

или, с учетом того, что $x_j = 0$,

$$y_{j-1} = a - bh + ch^2,$$

$$y_j = a,$$

$$y_{j+1} = a + bh + ch^2.$$

Складывая первое и последнее равенства, получим:

$$y_{j+1} + y_{j-1} = 2a + 2ch^2$$

или

$$c = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{2h^2}.$$

Для определения коэффициента b вычтем из третьего равенства первое. Получим:

$$y_{j+1} - y_{j-1} = 2bh.$$

Отсюда

$$b = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}.$$

Для определения производной воспользуемся формулой

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = (b + 2cx) \Big|_{x=x_j} = b.$$

Или

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}.$$

Значение второй производной

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_j} = 2c$$

или

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_j} = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}.$$

Построенные формулы для первой и второй производной совпадают с формулами, полученными методом конечных разностей [8, с. 107-120, с. 146-151].

Если теперь аппроксимировать $y(x)$ полиномом первой степени, т.е. $y(x) = a + bx$, то в зависимости от таблицы значений функции y_j, y_{j+1} или y_{j-1}, y_j , получатся формулы для аппроксимации

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$ правой или левой пространственными разностями

соответственно.

Заметим, что аппроксимационные формулы для производных, полученные при помощи полиномов выше второго порядка, уже не идентичны выражениям, полученным разложением в ряд Тейлора [7, с. 44-45]. В каждом случае погрешность аппроксимации проверяется при помощи разложения по формуле Тейлора [7, с. 44].

Вопрос о применении теории сплайнов при построении разностных схем рассматривается в [2, с. 145-159].

Замечание 1. Среди других методов построения разностных схем отметим проекционные методы [2, с. 138-144]: метод конечных элементов, метод Галеркина, метод Рэлея-Ритца и другие. В их основе лежит идея аппроксимации решения дифференциального уравнения конечной линейной комбинацией заданных функций, называемых *базисными*. Интегро-интерполяционный метод (ИИМ) или *метод баланса* применяется при построении разностных схем, аппроксимирующих основные

уравнения исходной задачи, записанные в интегральной, а не в дифференциальной форме [1, с. 111-116]. В результате применения этого метода получается *консервативная* или *дивергентная* разностная схема.

Под *консервативной разностной схемой* понимаем схему, выражающую на сетке разностные аналоги соответствующих законов сохранения [1, с. 111-114]. Кроме того, при построении разностных схем для решения задачи Коши применяются: метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера [9, с. 214-215], методы Рунге-Кутты [9, с. 218-230] или, так называемые, *одношаговые методы*. К числу *многошаговых методов* построения разностных схем принадлежат экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса [9, с. 230-238].

Одним из основных методов численного решения граничных задач, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных, является *метод конечных разностей* [8, с. 107-120, с. 146-151]. Не нарушая общности, проведем рассмотрение метода конечных разностей на примере краевой задачи для ОДУ второго порядка.

1.2.3. Метод конечных разностей

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу [8, с. 107-120]:

$$Ly = f,$$

где

$$Ly \equiv \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0), \\ y'(1), \end{cases} \quad (1.40)$$

$$f \equiv \begin{cases} r(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \alpha, \\ \beta, \end{cases}$$

$p(x), q(x), r(x)$ – заданные функции, α, β – известные числа. Будем предполагать, что задача (1.40) корректно поставлена. Используя метод конечных разностей, называемый иначе *методом сеток*, опишем алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1.40) на ПЭВМ.

Согласно методу сеток необходимо выполнить следующие действия:

1) заменить область непрерывного изменения аргумента $x \in [0, 1]$ некоторой дискретной областью. Для этой цели рассмотрим, например, равномерную сетку на отрезке $[0, 1]$ с $N + 1$ узлами:

$$\overline{\omega}_h = \{x_j, x_j = jh, j = \overline{0, N}, N = 1/h, h > 0\};$$

2) аппроксимировать краевую задачу (1.40) на множестве узлов $x_j \in \overline{\omega}_h$ некоторой разностной задачей

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.41)$$

где

$$y^{(h)} \in U_h, f^{(h)} \in F_h,$$

U_h – пространство сеточных функций – решений задачи (1.41),

F_h – пространство сеточных функций – правых частей разностной задачи (1.41);

3) решить разностную задачу (1.41) каким-либо численным методом, т.е. найти приближенные значения решения $y_j \approx y(x_j)$ в

узлах сетки $\overline{\omega}_h$. Под $y(x_j)$ понимаем значения решения дифференциальной задачи (1.40), вычисленные в узлах $x_j \in \overline{\omega}_h$, y_j – значение в узле x_j решения разностной задачи (1.41). В

рассматриваемом случае разностная задача (1.41) представляет собой систему $N + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно $N + 1$ неизвестных y_0, y_1, \dots, y_N .

При таком подходе к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо решить следующие вопросы:

1) выбрать формулы численного дифференцирования, хорошо приближающие производные из (1.40);

2) определить порядок аппроксимации краевой задачи разностной схемой, устойчивость разностной схемы и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи;

3) показать разрешимость системы линейных алгебраических уравнений и указать метод её решения.

Обсудим решение каждого из перечисленных вопросов на примере поставленной задачи (1.40).

1.2.3.1. Выбор формул численного дифференцирования

Аппроксимируем производные из (1.40) в узле x_j по следующим формулам численного дифференцирования [8, с. 109]:

$$y''(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1};$$

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} \quad \text{- правая разностная производная,}$$

$$j = \overline{0, N-1};$$

или

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_j) - y(x_{j-1}))}{h} \quad \text{- левая разностная производная,} \quad j = \overline{1, N};$$

или

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} \quad \text{- центральная разностная производная,}$$

$$j = \overline{1, N-1}.$$

Тогда вместо краевой задачи (1.40) получим разностную задачу (1.41), где

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j, & j = \overline{1, N-1}, \\ y_0, \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \end{cases} \quad (1.42)$$

или

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j, & j = \overline{1, N-1}, \\ y_0, \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \end{cases} \quad (1.43)$$

а

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} r_j, & j = \overline{1, N-1}, \\ \alpha, \\ \beta, \end{cases}$$

1.2.3.2. Определение порядка аппроксимации дифференциальной задачи разностной

Исследуем погрешность от замены производных из (1.40) по формулам численного дифференцирования, предполагая, что функция $y(x)$ обладает достаточной гладкостью. Разложим $y(x_{j\pm 1})$ в окрестности x_j по формуле Тейлора. Будем иметь:

$$y(x_{j\pm 1}) = y(x_j \pm h) = y(x_j) \pm hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) \pm \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{IV}(x_j) + O(h^5),$$

где $O(h^5)$ означает, что остаточный член разложения стремится к нулю при шаге $h \rightarrow 0$, как h^5 .

Тогда

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} = y''(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1),$$

где $x_{j-1} < \xi_1 < x_{j+1}$. Аналогично получаем:

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} = y'(x_j) + \frac{h^2}{6} y'''(\xi_2),$$

где $x_{j-1} < \xi_2 < x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} = y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(\xi_3),$$

где $x_j < \xi_3 < x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_N) - y(x_{N-1}))}{h} = y'(x_N) - \frac{h}{2} y''(\xi_4),$$

где $x_{N-1} < \xi_4 < x_N$.

Определяем теперь невязку $\delta f^{(h)}$ по формуле

$$L_h[y]_h - f^{(h)} = \delta f^{(h)}, \quad [y]_h \in U_h; \quad f^{(h)}, \delta f^{(h)} \in F_h.$$

При использовании правой разностной производной имеем:

$$L_h[y]_h \equiv \begin{cases} y''(x_j) + p_j y'(x_j) + q_j y(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) + \frac{h}{2} y''(\xi_3) p_j, \\ y(x_0), \\ y'(x_N) - \frac{h}{2} y''(\xi_4), \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} r_j, & j = \overline{1, N-1}, \\ \alpha, \\ \beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \frac{h}{2} p_j y''(\xi_3) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \frac{h}{2} y''(\xi_4) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases}$$

При замене $y'(x_j)$ центральной разностной производной получаем:

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \frac{h^2}{6} p_j y'''(\xi_2) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \frac{h}{2} y''(\xi_4) \equiv \delta f_3^{(h)}, \end{cases}$$

Из проведенных исследований заключаем, что разностные схемы (1.42), (1.43) аппроксимируют дифференциальную задачу (1.40) на решении $y(x) \in C^4[0, 1]$ с локальной ошибкой (ошибкой на одном шаге) $O(h)$. Отметим, что порядок аппроксимации разностной схемы (1.43) можно повысить до второго относительно h , если аппроксимировать $y'(x_N)$ по формуле численного дифференцирования [10, с. 57-59]:

$$\frac{3y(x_N) - 4y(x_{N-1}) + y(x_{N-2}))}{2h} = y'(x_N) - \frac{h^2}{3} y'''(\xi_5),$$

где $x_{N-2} < \xi_5 < x_N$.

Тогда невязка $\delta f^{(h)}$ принимает вид:

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \frac{h^2}{6} p_j y'''(\xi_2) \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \frac{h^2}{3} y'''(\xi_5) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases} \quad (1.44)$$

Получим оценку $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$ из (1.44). Имеем:

$$\begin{aligned} \left| y''(x_j) - \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right| &\leq \frac{h^2}{12} \|y^{IV}\|_C, \\ \left| p(x_j)y'(x_j) - p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \right| &\leq \frac{h^2}{6} \|p\|_C \cdot \|y'''\|_C, \\ \left| y'(x_N) - \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} \right| &\leq \frac{h^2}{3} \|y'''\|_C. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_j = p(x_j), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \|p\|_C = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|, \quad \|y^{IV}\|_C = \max_{x \in [0,1]} |y^{IV}(x)|, \\ \|y'''\|_C = \max_{x \in [0,1]} |y'''(x)|. \end{aligned}$$

Пусть $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{1 \leq i \leq 3} |\delta f_i^{(h)}|$. Тогда получаем

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C \cdot h^2,$$

где C – некоторая не зависящая от h постоянная.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае разностных схем (1.42), (1.43)

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C \cdot h.$$

1.2.3.3. Устойчивость разностной схемы и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной. Вопросы разрешимости разностной задачи

Разностную задачу (1.42) запишем в виде:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \\ \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j = r_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ y_N - y_{N-1} = \beta h. \end{cases} \quad (1.45)$$

Или

$$A\bar{y} = \bar{b}, \quad (1.46)$$

где $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T$, $\bar{b} = (\alpha, h^2 r_1, \dots, h^2 r_{N-1}, \beta h)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 - hp_1 + q_1 h^2 & 1 + hp_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - hp_2 + q_2 h^2 & 1 + hp_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 - hp_{N-1} + q_{N-1} h^2 & 1 + hp_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A системы линейных алгебраических уравнений (1.46) является трехдиагональной матрицей с доминирующей главной диагональю, если при $0 \leq x \leq 1$ функция $q(x) \leq 0$. Это условие гарантирует существование единственного решения разностной краевой задачи (1.42), причем, решение может быть получено методом прогонки [11, с. 130-133].

В самом деле, задачу (1.45) можно привести к виду:

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = F_j, j = \overline{1, N-1}, \\ y_0 - \alpha_0 y_1 = \gamma_0, \\ y_N - \alpha_N y_{N-1} = \gamma_N, \end{cases} \quad (1.47)$$

где

$$A_j = \frac{1}{h^2}, \quad C_j = \frac{2}{h^2} + \frac{p_j}{h} - q_j, \quad B_j = \frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{h}, \\ F_j = r_j, \quad \alpha_0 = 0, \quad \gamma_0 = \alpha, \quad \alpha_N = 1, \quad \gamma_N = \beta h.$$

При этом должны выполняться следующие достаточные условия устойчивости метода прогонки [10, с.161-166]:

$$|C_j| \geq |A_j| + |B_j|, \quad |\alpha_0| < 1, \quad |\alpha_N| \leq 1. \quad (1.48)$$

Неравенства (1.48) справедливы, если $q(x) \leq 0$ при $x \in [0, 1]$.

Аналогичными исследованиями можно показать существование и единственность решения разностной задачи (1.43).

Чтобы доказать устойчивость разностных схем (1.42), (1.43), требуется показать выполнение неравенства

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} \leq C \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h}. \quad (1.49)$$

Здесь C – константа, не зависящая ни от h , ни от $f^{(h)}$. С

доказательством устойчивости можно познакомиться в [10, с. 207-209].

Таким образом, разностная схема (1.42) аппроксимирует краевую задачу (1.40) с первым порядком относительно h и устойчива, если [10, с. 205]

$$h < h_0 = \min \left\{ 1, \frac{2}{\|p\|_c} \right\}.$$

Тогда согласно основной теореме 1 теории разностных схем получаем, что решение разностной задачи (1.42) будет сходиться к решению дифференциальной задачи (1.40) с первым порядком относительно h , т.е.

$$\| [y]_h - y^{(h)} \|_{U_h} \leq Kh,$$

где K – постоянная, не зависящая от h .

Итак, решая систему линейных алгебраических уравнений (1.47) экономичным методом прогонки, получаем приближенные значения y_0, y_1, \dots, y_N решения краевой задачи (1.40) в узлах сетки $\overline{\omega}_h$.

Замечание 2. Метод сеток применяется для решения краевой задачи (1.40) при $q(x) > 0$, когда условия (1.48) не выполняются. Однако в этом случае заранее предвидеть успешный результат трудно. Обычно проводят расчеты для разных значений шага (не менее трех) и сравнивают y_i в одних и тех же узлах сетки между собой. Если разность этих значений уменьшается при измельчении шага, то решение стремится к некоторому пределу при $h \rightarrow 0$.

1.3. Исследование устойчивости разностных схем

1.3.1. Достаточный признак устойчивости разностных схем решения задачи Коши

Рассмотрим один из наиболее широко используемых на практике методов исследования устойчивости на примере задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [3, с. 123]:

$$Ly \equiv \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Ay = f(x), \\ y(0) = a, \end{cases} \quad (1.50)$$

где $A = \text{const}, a = \text{const}, 0 \leq x \leq 1$.

обозначать его через Y_h . Отметим, что в общем случае числа R_h^j образуют матрицу R_h и для доказательства устойчивости необходимо показать ограниченность $\|R_h\|$.

1.3.3. Спектральный признак устойчивости

При получении оценки для $\|R_h\|$ можно воспользоваться собственными значениями матрицы R_h . Данное утверждение легко вытекает из определения ненулевого собственного вектора \bar{u} , соответствующего собственному значению λ матрицы R_h .

В самом деле, по определению имеем $R_h \bar{u} = \lambda \bar{u}$. Далее, очевидно, $R_h^j \bar{u} = \lambda^j \bar{u}$, $\|R_h^j \bar{u}\| = |\lambda|^j \|\bar{u}\|$, $\|R_h^j \bar{u}\| \leq \|R_h^j\| \cdot \|\bar{u}\|$. Тогда $\|R_h^j\| \geq |\lambda|^j$. Таким образом, для ограниченности $\|R_h^j\|$ необходимо, чтобы были ограничены степени собственных значений $|\lambda|^j$, $j = \overline{1, N}$. Для этого все собственные значения должны лежать в круге радиуса $1 + C \cdot h$, т.е.

$$|\lambda| \leq 1 + C \cdot h, \quad (1.62)$$

причем C не зависит от h .

Легко видеть, что в противном случае, для достаточно малого h , будем иметь:

$$\|R_h^j\| \geq |\lambda|^N > (1 + Ch)^{1/h} = e^{\frac{1}{h} \ln(1+Ch)} \geq e^{C \left(1 - \frac{Ch}{2}\right)} \geq e^{C/2}. \quad (1.63)$$

Рассмотренный признак устойчивости не зависит ни от выбора нормы в пространстве, где действует оператор R_h , ни от способа приведения схемы к канонической форме [3, с. 138-139].

1.4. Решение примеров

Проиллюстрируем применение изложенной теории к решению конкретных примеров.

Пример 2. Исследуем с помощью необходимого признака устойчивость следующей разностной схемы:

$$\begin{cases} 4 \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - 3 \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + Ay_j = 0, & j = \overline{1, N-1}; \\ y_0 = a, \\ y_1 = (1-hA)a, \end{cases} \quad (1.64)$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу (1.50) при $f(x) = 0$.
Запишем схему (1.64) в канонической форме

$$u_j = R_h u_{j-1}, \quad j = \overline{1, N},$$

где

$$u_j = \begin{bmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{bmatrix}, \quad \rho_j \equiv 0, \quad R_h = \begin{pmatrix} 3+hA & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} (1-hA)a \\ a \end{bmatrix}.$$

Определим собственные значения матрицы R_h , как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (3+hA)\lambda + 2 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{3+hA}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3+hA}{2}\right)^2 - 2}$$

и

$$\lambda_1 = \frac{3+hA}{2} + \sqrt{\frac{1+6hA+h^2A^2}{4}}, \quad \lambda_2 = \frac{3+hA}{2} - \sqrt{\frac{1+6hA+h^2A^2}{4}}.$$

$\lambda_1(h)$ при $h \rightarrow 0$ стремится к 2, т.е. при малых h имеем, что

$$|\lambda_1| > \frac{3}{2} > 1, \quad |\lambda_2| \rightarrow 1.$$

Поэтому схема будет неустойчивой. При любом разумном выборе норм в этом примере неустойчивость сохраняется [3, с. 141].

Заметим, что расположение спектра оператора R_h внутри круга $|\lambda| < 1 + C \cdot h$ не гарантирует устойчивость. В этом случае устойчивость зависит от удачного выбора норм. Проиллюстрируем этот факт на следующем примере.

Пример 3. Исследовать устойчивость разностной схемы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \quad x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.65)$$

Аппроксимируем задачу (1.65) следующей разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = f_j, \quad j = \overline{1, N-1} \\ y_0 = a, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} = b. \end{cases} \quad (1.66)$$

Для исследования устойчивости схемы (1.66) приведём ее к канонической форме $u_j = R_h u_{j-1} + h \rho_j$, вводя обозначение:

$$u_j = \begin{bmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$R_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_j = \begin{bmatrix} hf_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} a + hb \\ a \end{bmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

получим $\lambda_{1,2} = 1$.

Если $f_j \equiv 0$, решение задачи (1.66) имеет вид:

$$y_j = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot j, \quad j = \overline{0, N}.$$

Выберем нормы в пространствах U_h, F_h, Y_h одним из двух нижеприведенных способов.

Первый способ.

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{Y_h} &= \max \left\{ |u_j^{(1)}|, |u_j^{(2)}| \right\}; \\ \|y^{(h)}\|_{U_h} &= \max_{0 \leq j < N} \|u_j\|_{Y_h}; \\ \|f^{(h)}\|_{F_h} &= \max \left\{ \|u_0\|_{Y_h}, \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m| \right\}. \end{aligned}$$

Второй способ.

$$\|u_j\|_{y_h} = \max \left\{ |u_j^{(1)}|, \left| \frac{u_j^{(2)} - u_j^{(1)}}{h} \right| \right\};$$

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} = \max_{0 \leq j < N} \|u_j\|_{y_h};$$

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max \left\{ \|u_0\|_{y_h}, \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m| \right\}.$$

Нетрудно убедиться [3, с. 124, 134, 142], что для обоих случаев задания норм исследование устойчивости равносильно оценке:

$$\|R_h^j\| \leq C, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.67)$$

Покажем, что при выборе норм первым способом оценка (1.67) не выполняется. В самом деле, пусть $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\|u_0\| = 1$.

Очевидно, что $u_j = \begin{pmatrix} j+1 \\ j \end{pmatrix}$ и $\|u_j\| = j+1$. Далее имеем, что

$$u_j = R_h u_{j-1} = \dots = R_h^j u_0. \text{ Очевидно, что } \|R_h^j u_0\| \leq \|R_h^j\| \cdot \|u_0\| = \|R_h^j\|.$$

С другой стороны, $\|R_h^j u_0\| = \|R_h u_{j-1}\|$. Тогда $\|R_h^j\| = \|R_h u_{j-1}\| = j+1$, т.е. $\|R_h^j\| \geq j+1$. Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ имеем $j+1 \rightarrow \infty$.

Что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что при задании норм вторым способом, устойчивость имеет место.

При любом $u_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{y_h} &= \|R_h^j u_0\|_{y_h} = \left\| \begin{pmatrix} y_0 + (y_1 - y_0)(j+1) \\ y_0 + (y_1 - y_0) \cdot j \end{pmatrix} \right\|_{y_h} = \\ &= \max \left\{ |y_0 + (y_1 - y_0)(j+1)|, \left| \frac{y_1 - y_0}{h} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Т.к. $j+1 \leq \frac{1}{h}$, то $\|u_j\|_{y_h} = \|R_h^j u_0\|_{y_h} \leq |y_0| + \left| \frac{y_1 - y_0}{h} \right| \leq 2 \cdot \|u_0\|_{y_h}$.

Из последнего неравенства, очевидно, имеем, что

$$\|R_h^j\| \leq 2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отметим, что на практике ограничиваются проверкой необходимого спектрального признака устойчивости, и затем осуществляют численные расчеты по схеме с использованием ПЭВМ, подтверждая результаты теоретических исследований. В качестве иллюстрации приведем пример 4.

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Точное решение данной задачи имеет вид

$$y(x) = 1 - x^2.$$

Для численного решения поставленной задачи применим разностную схему, построенную методом конечных разностей:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = -2, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = 1, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} = 0 \text{ или } y_1 = y_0 = 1, \text{ где } x_j = x_0 + jh, \quad j = \overline{0, N}; \quad h = \frac{1}{N}. \end{cases}$$

Из разностной схемы получаем расчетные формулы:

$$y_{j+1} = 2y_j - y_{j-1} - 2h^2, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$

Результаты численных расчетов приведены в табл. 1.1 для $N = 10; 20; 40$.

Таблица 1.1

N	x_j	Точное решение $y(x_j)$	Численное решение y_j	Абсолютная погрешность
10	0	1	1	0
	0,1	1	1	0
	0,2	0,96	0,98	0,02
	0,3	0,91	0,94	0,03
	0,4	0,84	0,88	0,04
	0,5	0,75	0,80	0,05
	0,6	0,64	0,70	0,06
	0,7	0,51	0,58	0,07
	0,8	0,36	0,44	0,08
	0,9	0,19	0,28	0,09
20	0	1	1	0
	0,1	0,99	0,995	0,005
	0,2	0,96	0,97	0,010
	0,3	0,91	0,925	0,015
	0,4	0,84	0,86	0,020
	0,5	0,75	0,775	0,025
	0,6	0,64	0,67	0,030
	0,7	0,51	0,545	0,035
	0,8	0,36	0,4	0,040
	0,9	0,19	0,235	0,045
40	0	1	1	0
	0,1	0,99	0,9925	0,0025
	0,2	0,96	0,9650	0,0050
	0,3	0,91	0,9175	0,0075
	0,4	0,84	0,8500	0,010
	0,5	0,75	0,7625	0,0125
	0,6	0,64	0,6550	0,0150
	0,7	0,51	0,5275	0,0175
	0,8	0,36	0,3800	0,0200
	0,9	0,19	0,2125	0,0225

	1,0	0	0,0250	0,0250
--	-----	---	--------	--------

Из приведенных результатов видно, что с уменьшением шага сетки h результаты численных расчетов приближаются к точному решению.

Пример 5. Решить численно задачу Коши

$$\begin{cases} y' = -2y + 1 \\ y(0) = 1, x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Решение. Точное решение задачи имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} + 1)$$

и при $x \rightarrow \infty$ следует, что $y \rightarrow 0,5$.

Решим численно эту задачу с помощью следующей разностной схемы:

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = -2y_j + 1, j = \overline{1, N-1}, N - \text{задано}$$

или

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_{j-1} - 4hy_j + 2h, j = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = 1, \\ y_1 = 0,5e^{-2h} + 0,5. \end{cases}$$

Можно показать, что при $h \rightarrow 0$ численное решение стремится к ∞ . Само решение устойчиво, в чем нетрудно убедиться. Описанное явление не связано с ошибками округлений. Исследуем метод на устойчивость. Для этого запишем схему в канонической форме.

Имеем

$$\begin{cases} y_{j+1} = -4hy_j + y_{j-1} + 2h, j = \overline{1, N-1}, \\ y_j = y_j. \end{cases}$$

Обозначим

$$u_j = \begin{bmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{bmatrix}, u_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}, u_0 = \begin{bmatrix} 0,5e^{-2h} + 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$u_j = R_h u_{j-1} + h\rho_j$$

и

$$R_h = \begin{pmatrix} -4h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_j = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\det |R_h - \lambda E| = 0$$

имеет вид $\lambda^2 + 4\lambda h - 1 = 0$. Отсюда находим

$$\lambda_{1,2} = -2h \pm \sqrt{4h^2 + 1}$$

и

$$\lambda_1 = -2h + \sqrt{1 + 4h^2}, \lambda_2 = -2h - \sqrt{1 + 4h^2}$$

Тогда $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$ при фиксированном h (если $h = 0,25$, то $\lambda_1 \approx 0,62$; $\lambda_2 \approx -1,62$).

При $h \rightarrow 0$ имеем, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

В самом деле, воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Big|_{x=0} \frac{x}{1!} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (1+x)^{-3/2} \Big|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + O(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3) \end{aligned}$$

Тогда $\sqrt{1+h^2} \approx 1 + \frac{h^2}{2}$ и

$$\lambda_1 = -2h + 1 + \frac{h^2}{2} + \dots = 1 - 2h + O(h^2),$$

$$\lambda_2 = -2h - 1 - \frac{h^2}{2} + \dots = -1 - 2h + O(h^2).$$

При $h \neq 0$ имеем $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. Если $h \rightarrow 0$, то $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Схема неустойчива. Этот факт подтверждается результатами вычислений, приведенных в табл. 1.2.

Результаты численных расчетов помещены в табл. 1.2 при $h = 0,25$ и $h = 0,125$; $y(x_j)$ - точные значения решения,

вычисленные в соответствующих узлах сетки x_j .

Заметим, что в табл. 1.2 значения численного решения y_j , вычисленные по разностной схеме с шагом $h = 0,125$, начиная с значения в точке $x_j = 3,25$, меняют знак с «+» на «-». Например,

при $x_j = 3,375$ имеем $y_j = -0,164401$; при $x_j = 3,625$ находим $y_j = -0,636973$; ...; при $x_j = 7,875$ получаем $y_j = -5249,304800$; при $x_j = 8,125$ вычисляем $y_j = -8611,2179$. В таблицу эти значения не включены ввиду громоздкости записи.

Таблица 1.2

x_j h		0	1,00	2,00	4,00	6,50	7,25	8,00
0,25	y_j	1	0,5902	0,6314	6,1780	411,4249	-1233,2748	5346,5240
0,125	y_j	1	0,5724	0,5347	2,9605	345,5932	1523,7688	6724,3261
	$y(x_j)$	1	0,5676	0,5091	0,5001	0,500001	0,500000	0,500000

1.5. Лабораторные задания

Задание 1. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему для соответствующего дифференциального уравнения (использовать предложенный шаблон).

Варианты заданий

Вариант №1.

$$y'' + y = \sin x;$$

шаблон

$$i-1 \quad i \quad i+1$$

:

Вариант №2.

$$y'' - (2x^2 + 4)y = 2;$$

шаблон

$$i-1 \quad i+1 \quad i+2$$

:

Вариант №3.

$$y'' + 2y = \sin x;$$

шаблон

$$i-2 \quad i-1 \quad i+1 \quad i+2$$

:

Вариант №4.

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = 1;$$

шаблон

$$i \quad i+1$$

:

Вариант №5.

$$y'' - y = \cos x; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-1 & i & i+1 \end{array}$$

Вариант №6.

$$y'' + (x^2 + 0.5)y = 1; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-2 & i-1 & i \end{array}$$

Вариант №7.

$$y'' + (x^2 + 4)y = 1; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-1 & i & i+1 \end{array}$$

Вариант №8.

$$y'' + y = e^x; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 \end{array}$$

Вариант №9.

$$y'' - y = \sin x; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-1 & i & i+2 \end{array}$$

Вариант №10.

$$y'' - (x^2 + 3)y = 2; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-2 & i-1 & i+1 \end{array}$$

Вариант №11.

$$y'' - (x + 4)y = 2; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-2 & i-1 & i+1 & i+2 \end{array}$$

Вариант №12.

$$y'' - (x^2 + 1)y = e^{-x}; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-1 & i+1 & i+2 \end{array}$$

Вариант №13.

$$y'' - 4y + x^2 = \ln x; \quad \begin{array}{l} \text{шаблон} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{i} & \dot{i} & \dot{i} \\ i-1 & i & i+1 \end{array}$$

Задание 2.

1) Оценить погрешность аппроксимации указанной ниже дифференциальной задачи данной разностной схемой.

2) Привести разностную схему к каноническому виду и исследовать её на устойчивость с помощью спектрального признака.

Варианты заданий

Вариант №1.

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - (1+x^2)u, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \\ \frac{du(0)}{dx}, \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, \\ 1, \end{cases}$$
$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - (1+x_i^2)u_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \\ \frac{u_1 - u_0}{h}, \end{cases}$$
$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sqrt{ih}, & i = \overline{1, N-1}, \\ 2, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №2.

$$Lu \equiv \begin{cases} u'' - (1+x^2)u, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \\ u(1), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sqrt{x+1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, \\ 1. \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - (1 + x_i^2)u_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \\ u_N, \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sqrt{x_i + 1}, & i = \overline{1, N-1}, \\ 2, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №3.

$$Lu \equiv \begin{cases} v' + xw, & 0 \leq x \leq 1, \\ w' + \frac{v+w}{1+x^2}, \\ v(0), \\ w(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ \cos^2 x, \\ 1, \\ -3, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} + x_i w_i, & i = \overline{0, N-1}, \\ \frac{w_{i+1} - w_i}{h} + \frac{v_i + w_i}{1 + x_i^2}, \\ v_0, \\ w_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} x_i^2 - 3x_i + 1, & i = \overline{0, N-1}, \\ \cos^2 x_i, \\ 1, \\ -3, \end{cases}$$

Вариант №4.

$$Lu \equiv \begin{cases} v' + xv, & 0 \leq x \leq 1, \\ w' + (1+x^2)(v+w), \\ v(0), \\ w(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{tg} x, \\ 2, \\ -1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{v_i - v_{i-1}}{h} + x_i v_i, & i = \overline{1, N}, \\ \frac{w_i - w_{i-1}}{h} + (1 + x_i^2)(v_i + w_i), & \\ v_0, & \\ w_0, & \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i, & i = \overline{1, N}, \\ \operatorname{tg} x_i, & \\ 2, & \\ -1. & \end{cases}$$

Вариант №5.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, & A = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), & \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4, & \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} 3 \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + Au_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, & \end{cases} \\ f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ 4. & \end{cases}$$

Вариант №6.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, & A = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), & \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{2h} + Au_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, & \end{cases} \\ f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos x_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ 2. & \end{cases}$$

Вариант №7.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, & A = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \text{tg}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4h} + \frac{u_i - u_{i-1}}{2h} + Au_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \end{cases}$$
$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \text{tg}x_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №8.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, & A = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} 4 \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 3 \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + Au_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \end{cases}$$
$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos x_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №9.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + Au, & A = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + A \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, & i = \overline{0, N-1}, \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin x_i, & i = \overline{0, N-1}, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №10.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' - 5u, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 5u_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \operatorname{tg} x_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ 1. \end{cases}$$

Вариант №11.

$$Lu \equiv \begin{cases} u' + xu, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, \end{cases}$$

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + x_i u_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0, \end{cases} \quad f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos ih, & i = \overline{1, N-1}, \\ 3. \end{cases}$$

Задание 3. Методом конечных разностей решить следующие краевые задачи.

Варианты заданий

Вариант №1.

$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = 1; \quad y(0,5) = 0,7; \quad 2y(1) + 3y'(1) = 1,5.$$

Вариант №2.

$$y'' - xy' + 2y = x + 0,5; y(0,5) - 0,3y'(0,5) = 3, y(0,9) = 1.$$

Вариант №3.

$$y'' + xy' + y = x + 0,5; y(0,7) + 2y'(0,7) = 0,8, y'(1,2) = 0,9.$$

Вариант №4.

$$y'' + 2y' - y/x = 1; y(0,1) = 1; 2y(0,5) - y'(0,5) = 2.$$

Вариант №5.

$$y'' + 2y' - xy = 0,7; y'(0,5) = 0,6; y(0,8) - 0,5y'(0,8) = 0,9.$$

Вариант №6.

$$y'' - y' + 2y/x = x + 0,5; y(1,2) - 0,6y'(1,2) = 1; y'(1,5) = 3.$$

Вариант №7.

$$y'' - 3y' + y/x = 2; y(0,3) = 1; y(0,6) + 2y'(0,6) = 0,5.$$

Вариант №8.

$$y'' + 3y' - y/x = x + 0,9; y'(1,1) = 1; 2y(1,4) - y'(1,4) = 0,4.$$

Вариант №9.

$$y'' - \frac{y'}{3} + 2y = x^2; y(0,9) + 2y'(0,9) = 0,5; y(1,2) = 1.$$

Вариант №10.

$$y'' + 1,5y' - xy = 0,7; 2y(1,2) - y'(1,2) = 0,9; y(1,5) = 2.$$

Вариант №11

$$y'' + 2xy' - y = 0,5; 2y(0,2) + y'(0,2) = 0,9; y'(0,5) = 1.$$

Литература

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
2. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
3. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
4. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 126 с.
5. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.В. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
6. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: изд-во ТМЛ - Пресс, 2007. - Ч.2. – 288 с.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, т.2, 1977. – 399 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
10. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
11. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: изд-во ТГУ, 2005. – 257 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите методы решения дифференциальных уравнений.
2. Охарактеризуйте численные методы или методы сеток.
3. Дайте понятие плохо (хорошо) обусловленной дифференциальной задачи.
4. Введите понятие сетки и сеточной функции.
5. Изобразите на плоскости равномерную и неравномерную сетку.
6. Нарисуйте неравномерную сетку в области с криволинейной границей.
7. Дайте определение аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной.

8. Сформулируйте определение устойчивости линейной разностной схемы.
9. Введите понятие сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной.
10. Приведите формулировку и доказательство теоремы Лакса.
11. Укажите правила выбора норм в пространствах сеточных функций.
12. Перечислите методы построения разностных схем.
13. Каким условиям должна удовлетворять хорошая разностная схема?
14. Продемонстрируйте метод неопределенных коэффициентов на примере задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка.
15. На простейшем примере проиллюстрируйте метод полиномиальной аппроксимации построения разностных схем.
16. Какие действия следует выполнить при численном решении краевых задач методом конечных разностей или методом сеток?
17. Приведите формулы численного дифференцирования, применяемые при замене производных первого и второго порядка.
18. На простейшем примере покажите получение порядка погрешности аппроксимации дифференциальной задачи разностной.
19. Покажите исследование устойчивости и сходимости решения разностной задачи, аппроксимирующей краевую задачу для ОДУ второго порядка.
20. Сформулируйте достаточный признак устойчивости разностных схем решения задачи Коши.
21. Приведите разностную схему решения задачи Коши для ОДУ первого порядка к канонической форме.
22. Как доказывается устойчивость разностной схемы, записанной в канонической форме?
23. Укажите спектральный признак устойчивости разностной схемы, записанной в канонической форме в общем случае.
24. На примере решения задачи Коши для ОДУ второго порядка покажите решение следующих вопросов:
 - 1) определите порядок погрешности аппроксимации;
 - 2) запишите разностную схему в канонической форме;
 - 3) исследуйте вопросы устойчивости разностной схемы;
 - 4) будет ли разностная схема однозначно разрешимой?
 - 5) будет ли решение разностной схемы сходиться к решению дифференциальной задачи?

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Общие замечания

Математическое моделирование многих задач механики, физики, химии и других областей науки и техники приводит к дифференциальным уравнениям, обыкновенным или в частных производных. В настоящем пособии ограничимся рассмотрением задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Простейшее ОДУ имеет вид:

$$y' = f(x, y(x)). \quad (2.1)$$

Для него может быть поставлена задача Коши: найти решение $y=y(x)$, $x \in [a, b]$, удовлетворяющее (2.1) и начальному условию

$$y(a) = y_0. \quad (2.2)$$

Другими словами, требуется получить интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через заданную точку $M(a, y_0)$. Существование и единственность решения задачи (2.1)-(2.2) следует из теоремы Коши [1]. Приведём её без доказательства.

Теорема Коши. Если правая часть $f(x, y)$ уравнения (2.1) и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области изменения переменных x и y , то для всякой внутренней точки (x_0, y_0) этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение $y = y_0$ при $x = x_0$.

Если речь идёт об обыкновенном дифференциальном уравнении n -го порядка ($n > 1$)

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.3)$$

то его решение (интегрирование) заключается в нахождении функций $y(x)$, которые удовлетворяют (2.3) для всех $x \in [a, b]$.

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (2.4)$$

Здесь c_1, c_2, \dots, c_n – произвольные постоянные, выбор которых определяет частное решение уравнения (2.3).

от элементарных функций. Класс задач, решение которых можно получить точными методами, сравнительно узок.

При использовании приближённых методов решение задачи Коши для ОДУ определяется как предел некоторой последовательности функций. При этом каждый член последовательности выражается через элементарные функции или квадратуры от элементарных функций. К *приближённым* методам относятся: разложения решения в обобщённый степенной ряд, метод Чаплыгина, метод Пикара, Канторовича и др. [2]. *Приближённые* методы удобно применять тогда, когда удаётся найти явное выражение для коэффициентов ряда.

Численные методы применимы к широким классам уравнений и систем уравнений. С появлением ЭВМ эти методы стали одним из основных способов решения практических задач для ОДУ. Они не дают общего решения задач (2.1) или (2.6) и предназначены для вычисления приближённых (а иногда точных) значений частных решений задач (2.1)-(2.2) или (2.6)-(2.7) на заранее выбранной сетке аргумента x – конечном множестве точек $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{1, N}$. В итоге искомое решение получается в виде таблицы.

Итак, пусть требуется находить значения $y_i \approx y(x_i)$, $i = \overline{1, N}$, приближённого решения задачи (2.1)-(2.2) в узлах сетки

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Большинство численных методов решения задачи (2.1)-(2.2) можно представить в виде [3]:

$$y_{m+1} = F(y_{m-q}, y_{m-q+1}, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+s}).$$

Здесь F – некоторая функция указанных аргументов, которая определяется выбранным методом, видом уравнения (2.1) и построенной сеткой.

Определение 1. При $q = 0$, $0 \leq s \leq 1$ численные методы называют *одношаговыми*, а при $q \geq 1$ или $s \geq 1$ – *многошаговыми*. Одношаговые методы называют *явными* при $s = 0$, *неявными* при $s = 1$. Многошаговые методы при $s > 1$ называют *с забеганием вперёд*.

С примерами указанных видов методов и со способами их построения познакомимся в данной главе.

Численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Однако формальное выполнение условий корректности может оказаться недостаточным для использования

численных методов. Необходимо, чтобы задача была *хорошо обусловлена (устойчива)* относительно входных данных. Если это условие не учитывать, то небольшие изменения начальных условий или небольшие погрешности численных методов могут сильно исказить решение. Приведем пример плохо обусловленной задачи.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши [4, с. 240]

$$y' = y - x, \quad (2.8)$$

$$y(0) = 1, \quad x \in [0, 100]. \quad (2.9)$$

Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$y(x, c) = 1 + x + ce^x \quad (2.10)$$

и содержит одну произвольную постоянную. Из начального условия (2.9) находим, что $c = 0$. Тогда $y(100) = 101$.

Незначительно изменим начальное условие. Например, пусть $\tilde{y}(0) = 1,000001$. Постоянная c тоже изменится слегка: $\tilde{c} = 10^{-6}$.

Однако

$$\tilde{y}(100) = 101 + 10^{-6} e^{100} \approx 2,7 \cdot 10^{37}$$

и решение сильно изменилось.

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $\bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T$.

Следовательно, алгоритмы решения задачи (2.11) получаются из алгоритмов для одного уравнения формальной заменой $y(x)$ и $f(x, y)$ на $\bar{y}(x), \bar{f}(x, \bar{y})$.

2.2. Метод разложения решения в ряд Тейлора

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.12)$$

удовлетворяющее при $x = a$ начальному условию

$$y(a) = y_0. \quad (2.13)$$

Будем считать, что выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (2.12)-(2.13). Кроме того, предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой области изменения аргументов x и y обладает необходимой гладкостью.

Широкое применение на практике получил аналитический метод, основанный на идее разложения в ряд решения рассматриваемой задачи Коши (2.12)-(2.13).

Чаще всего для этих целей используется ряд Тейлора. Приближённое решение $y_m(x)$ исходной задачи ищется в виде:

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^m \frac{(x-a)^j}{j!} y^{(j)}(a), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.14)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(0)}(a) = y(a) = y_0, \\ y^{(1)}(a) = y'(a) = f(a, y_0), \\ y^{(2)}(a) = y''(a) = \frac{\partial f(a, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(a, y_0)}{\partial y} \cdot f(a, y_0), \\ y^{(3)}(a) = y'''(a) = \frac{\partial^2 f(a, y_0)}{\partial x^2} + 2f(a, y_0) \frac{\partial^2 f(a, y_0)}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial^2 f(a, y_0)}{\partial y^2} \cdot f^2(a, y_0) + \frac{\partial f(a, y_0)}{\partial y} \left[\frac{\partial f(a, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(a, y_0)}{\partial y} \cdot f(a, y_0) \right], \\ \dots \\ y^{(m)}(a) = F_m \left(f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, \dots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-1}}, \dots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial y^{m-1}} \right) \Big|_{x=a, y=y_0}. \end{array} \right.$$

Отметим, что для производной m -го порядка конкретный вид многочлена F_m не приводится из-за его громоздкости. С увеличением m возрастает сложность применения метода, связанная с вычислением производных высокого порядка от $f(x, y)$.

Если правая часть уравнения (2.12) в окрестности точки (a, y_0) есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x , достаточно близких к a , существует единственное решение задачи

Коши (2.12)-(2.13), которое разлагается в ряд Тейлора. Тогда частичная сумма ряда (2.14) будет являться приближённым решением этой задачи.

Заметим, что с увеличением расстояния $|x-a|$ погрешность $y(x) - y_m(x)$, вообще говоря, возрастает по абсолютной величине. Формула (2.14) становится неприменимой, если x выходит из границ области сходимости соответствующего ряда Тейлора.

В этом случае предпочтительными становятся численные методы решения задачи Коши. С их помощью можно определить значения $y_m \approx y(x_m), m = 1, 2, \dots, N$, приближённого решения в, так называемых, узлах сетки:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b.$$

Достоинством численных методов является то, что их сходимости не зависит от длины отрезка $[a, b]$.

Аналогично метод разложения решения в ряд Тейлора применяется для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проиллюстрируем применение этого метода к задаче Коши для ОДУ второго порядка [5].

Пример 2. Найти первые шесть членов разложения в ряд Тейлора решения $y = y(x)$ уравнения

$$y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0$$

с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение. Будем искать решение в виде (2.14):

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Из начальных условий имеем $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Определим из уравнения вторую производную

$$y'' = -0,1(y')^2 - (1 + 0,1x)y.$$

Тогда

$$y''(0) = -0,1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -1,4.$$

Дифференцируя по x уравнение, выразим

$$y''' = -0,2y'y'' - 0,1(xy' + y) - y'.$$

Тогда $y'''(0) = -0,2 \cdot 2 \cdot (-1,4) - 0,1 \cdot 1 - 2 = -1,54$.

Далее, последовательно дифференцируя по x ещё два раза, получим

$$y^{(IV)} = -0,2(y'y''' + (y'')^2) - 0,1(xy'' + 2y') - y'',$$

$$y^{(V)} = -0,2(y'y^{(IV)} + 3y''y''') - 0,1(xy''' + 3y'') - y''''.$$

Используя начальные условия и значения $y''(0), y'''(0)$, определим

$$y^{(IV)}(0) = 1,224; \quad y^{(V)}(0) = 0,1768.$$

Итак, искомое приближённое решение задачи Коши запишется в виде

$$y(x) \approx 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,2567x^3 + 0,051x^4 + 0,00147x^5.$$

2.3. Метод Пикара

Метод Пикара или метод последовательных приближений Пикара известен из курса обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. С помощью этого метода приближённое решение задачи Коши получается в аналитическом виде как последовательность приближений $y_m(x), m = 1, 2, \dots$, к решению $y(x)$ задачи (2.12)-(2.13) следующим образом:

$$y_m(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y_{m-1}(t)) dt, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

$y_0(x)$ – задано.

Если функция $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике $R = \{(x, y) \mid |x - a| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L = \text{const},$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_m(x)$ сходятся к решению задачи (2.12)-(2.13) на некотором отрезке $[a, a + h]$ [5, с. 193]. Заметим также, что если

$f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R , то имеет место следующая оценка погрешности приближённого решения:

$$\varepsilon_m = |y(x) - y_m(x)| \leq M \cdot L^m \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (2.16)$$

где $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$, а число h определяется из условия:

$$h = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right). \quad (2.17)$$

Покажем применение метода Пикара на следующем примере.

Пример 3. Найти три последовательных приближения решения уравнения

$$y' = x + y$$

с начальным условием

$$y(0) = 0.$$

Решение. С учётом начального условия заменим ОДУ интегральным:

$$y(x) = \int_0^x (x + y) dx.$$

В качестве начального приближения выберем $y_0(x) = 0$.

Построим первое приближение:

$$y_1(x) = \int_0^x (x + y_0(x)) dx; \quad y_1(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Далее построим второе и третье приближения:

$$y_2(x) = \int_0^x (x + y_1(x)) dx = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x + y_2(x)) dx = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

В силу того что $f(x, y) = x + y$ определена и непрерывна во всей плоскости, в качестве α и β можно брать любые числа, например, $\alpha = 1, \beta = 0.5$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)| = \max_{(x,y) \in R} |x + y| = 1, 5;$$

$$L = \max_{(x,y) \in R} |f'_y(x, y)| = \max |1| = 1, \text{ где } R = \{|x| \leq 1, |y| \leq 0, 5\}.$$

Отсюда из (2.17) находим $h = \min\left(1, \frac{0,5}{1,5}\right) = 0,33$.

В результате на промежутке $[0; 0,33]$ имеет место оценка:

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{1,5 \cdot 1^3 \cdot x^4}{4!} = \frac{1}{16}x^4$$

и, следовательно,

$$\max_{x \in [0; 0,33]} |y(x) - y_3(x)| \leq \frac{1}{16}(0,33)^4 \approx 0,00075.$$

Заметим, что оценка погрешности, полученная по приведённой формуле, часто бывает завышена. На практике, применяя метод последовательных приближений Пикара, останавливаются на таком m , для которого значения y_m и y_{m-1} совпадают в пределах заданной точности.

У метода Пикара есть существенный недостаток, препятствующий его широкому применению на практике: необходимость выполнения интегрирования при осуществлении каждой итерации. Интегрирование может вызвать значительные трудности в зависимости от вида функции $f(x, y)$.

Метод последовательных приближений легко обобщается на случай системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.6). Тогда расчетные формулы имеют представление:

$$\bar{y}_m(x) = \bar{y}_0 + \int_0^x \bar{f}(t, \bar{y}_{m-1}(t)) dt, a \leq x \leq b,$$

$$\bar{y}_0(t) \equiv \bar{y}_0, a \leq t \leq b, m = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{y}_m = (y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{km})^T$, y_{km} - k -ая компонента вектора \bar{y}_m .

Пример 4. Методом Пикара построить несколько последовательных приближений для решения системы:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2 \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Запишем данную систему в интегральной форме:

$$\begin{cases} y_1(x) = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2) dx, \\ y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - y_1^2) dx. \end{cases}$$

Используя начальные значения $y_{10} = 1, y_{20} = \frac{1}{2}$, находим

$$\begin{cases} y_{11} = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx, \\ y_{21} = \frac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - 1) dx \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_{11} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x, \\ y_{21} = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} - x. \end{cases}$$

Аналогично получаем второе приближение

$$\begin{cases} y_{12} = 1 + \int_0^x (x + y_{11} y_{21}) dx, \\ y_{22} = \frac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - y_{11}^2) dx \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_{12} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{36}, \\ y_{22} = \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5. \end{cases}$$

Далее вычисления становятся громоздкими и их можно прекратить.

2.4. Метод Эйлера

Опишем простейший из численных методов – метод Эйлера нахождения таблицы значений решения $y(x)$ задачи Коши (2.12)-(2.13) для $x \in [a, b]$. Существует несколько подходов получения расчетных формул этого метода [3]. Остановимся на одном из них.

Область непрерывного изменения аргумента x заменяем дискретным множеством точек $x_j = a + jh$, называемых *узлами сетки*,

$$h = \frac{b-a}{N}, x_0 = a, x_N = b, h - \text{ шаг сетки.}$$

Численное решение задачи (2.12)-(2.13) представляет собой таблицу значений:

$$x_j, y_j, j = 0, 1, \dots, N,$$

где y_j – разностное или численное значение решения в узле x_j . Запишем уравнение (2.12) при $x = x_j$. По определению производной имеем:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \quad (2.18)$$

Отбрасывая предел в (2.18), заменим производную $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$ конечно-разностным отношением:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} \approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.12), получим:

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} \approx f(x_j, y(x_j)), j = 0, 1, \dots, N-1.$$

$y(x_j)$ – значение решения $y(x)$ задачи Коши в узле x_j . Обозначим через y_j численное решение, удовлетворяющее разностному уравнению

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1} \quad (2.20)$$

или

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1}. \quad (2.21)$$

Учитывая начальное условие (2.13), с помощью разностного уравнения (2.21) можно последовательно определить:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), (j = 1),$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), (j = 2),$$

$$-----$$

$$y_N = y_{N-1} + hf(x_{N-1}, y_{N-1}), (j = N - 1).$$

Итак, вычислительный алгоритм метода Эйлера (2.20), (2.13) или (2.21), (2.13) построен.

Графической иллюстрацией приближённого решения, полученного по методу Эйлера, является ломаная, соединяющая последовательно точки M_0, M_1, \dots, M_N , называемая ломаной Эйлера (рис. 2.1).

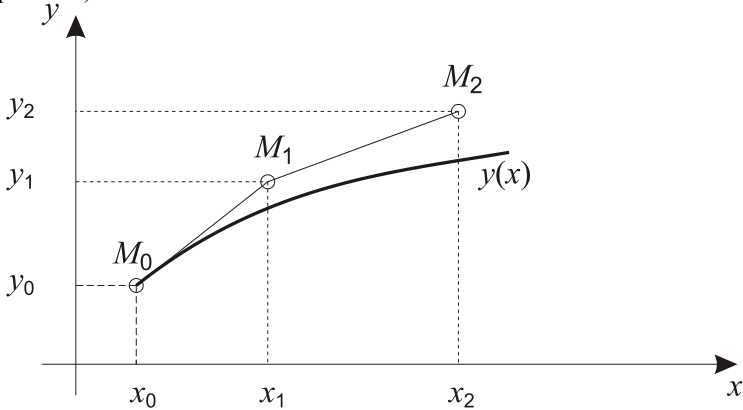


рис. 2.1

Точность построенного алгоритма определяется близостью $y(x_j)$ и y_j . Положим

$$y_j = y(x_j) + \delta y_j \quad (2.22)$$

и оценим величину погрешности δy_j . Подставим (2.22) в разностное уравнение (2.20) и перепишем разностное уравнение в виде

$$\frac{\delta y_{j+1} - \delta y_j}{h} = f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}. \quad (2.23)$$

Далее, пусть $y(x) \in C^3[a, b]$. Запишем разложение функции $y(x_{j+1})$ в окрестности узла по формуле Тейлора:

$$y(x_{j+1}) \equiv y(x_j + h) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y(\bar{x})}{dx^2},$$

где $x_j < \bar{x} < x_{j+1}$.

В силу того что $\frac{d^2 y}{dx^2}$ – ограниченная производная на $[a, b]$, предыдущее соотношение можно переписать в виде:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + O(h^2) = y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + O(h^2).$$

Из этого разложения следует, что

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} = f(x_j, y(x_j)) + O(h). \quad (2.24)$$

Сравнивая (2.24) и (2.20), нетрудно заметить, что точное решение исходной дифференциальной задачи удовлетворяет разностному уравнению (2.20) с точностью $O(h)$. Далее подставим (2.24) в правую часть (2.23). В результате получим:

$$\frac{\delta y_{j+1} - \delta y_j}{h} = f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - f(x_j, y(x_j)) + O(h). \quad (2.25)$$

Из условий существования и единственности решения задачи (2.12)-(2.13), накладываемых на функцию $f(x, y)$, справедливо неравенство

$$\left| f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - f(x_j, y(x_j)) \right| \leq L |\delta y_j|, \quad (2.26)$$

где L – константа Липшица. Используя (2.26), находим из (2.25)

$$\left| \delta y_{j+1} \right| \leq (1 + hL) \left| \delta y_j \right| + O(h^2). \quad (2.27)$$

С помощью неравенства (2.27) можно дать оценку роста погрешности за один шаг. Получим оценку для ошибки, накопленной за N шагов:

$$\begin{aligned} \left| \delta y_N \right| &\leq O(h^2) + (1 + hL) \left| \delta y_{N-1} \right| \leq O(h^2) + (1 + hL)O(h^2) + \\ &+ (1 + hL) \left| \delta y_{N-2} \right| \leq \dots \leq O(h^2) + (1 + hL)O(h^2) + (1 + hL)^2 O(h^2) + \\ &+ \dots + (1 + hL)^{N-1} O(h^2) + (1 + hL)^N \left| \delta y_0 \right|. \end{aligned}$$

Просуммируем геометрическую прогрессию со знаменателем $1 + hL$ в правой части неравенства. В результате придём к неравенству:

$$\left| \delta y_N \right| \leq \frac{(1 + hL)^N - 1}{(1 + hL) - 1} O(h^2) + (1 + hL)^N \left| \delta y_0 \right|. \quad (2.28)$$

Оценим, какова величина ошибки при малых значениях h для любого фиксированного x . Полагая $x = Nh$ и учитывая, что

$(1+hL)^N = (1+hL)^{\frac{x}{h}}$ пропорциональна e^{Lx} при условии $h \rightarrow 0$, получим из (2.28):

$$|\delta y(x)| \leq e^{Lx} O(h) + e^{Lx} |\delta y_0|. \quad (2.29)$$

Так как $\delta y_0 = y_0 - y_0 = 0$, то из (2.29) при $h \rightarrow 0$ следует, что $\delta y(t) = 0$.

Итак, доказано, что при достаточно малом h таблица x_j, y_j , полученная методом Эйлера, сколь угодно точно аппроксимирует решение исходной задачи (2.12)-(2.13).

Заметим, что не получен критерий – какой шаг h будет «достаточно малым» для достижения заданной точности.

Установлен лишь факт сходимости приближённого решения к точному при $h \rightarrow 0$.

Порядок точности метода Эйлера – минимальный, $y(x_j) - y_j = O(h)$. Очевидно, что это объясняется достаточно грубым способом аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

Качество аппроксимации оценивается по точности, с которой решение исходной задачи удовлетворяет разностному уравнению. Сравнение (2.24) и (2.20) показывает, что в этом случае аппроксимация имеет порядок $O(h)$. Заметим, что если вместо (2.20) использовать (2.21), то порядок аппроксимации будет $O(h^2)$. Это за счёт другой нормировки разностного уравнения (умножения его на h). Будем использовать так называемую естественную нормировку разностного уравнения, при которой оно в пределе переходит в другое дифференциальное уравнение. Например, (2.20) (точнее, (2.24)) при $h \rightarrow 0$ переходит в (2.12), в то время как (2.21) – в равенство $y = y$, которое никак не отражает особенностей исходной задачи.

Для того чтобы судить о достигнутой точности вычислений, необходимо провести расчеты с различными шагами сетки h и сравнить результаты. С этой точки зрения более удобны методы высокого порядка точности. Примером такого метода является метод Хьюна [3]. Метод Хьюна отличается от метода Эйлера (2.20) видом аппроксимации правой части:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})]. \quad (2.30)$$

Оценим порядок, с которым разностное уравнение (2.30) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.12). Подставим в (2.30) вместо y_j и y_{j+1} значения точного решения задачи (2.12)-(2.13) - $y(x_j)$ и $y(x_{j+1})$.

Используя разложения

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y(x_j)}{dx^2} + O(h^3),$$

$$f(x_{j+1}, y(x_{j+1})) = f(x_j, y(x_j)) + h \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_j} + O(h^2),$$

получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x_j} = \left(f + \frac{h}{2} \frac{df}{dx} \right)_{x_j} + O(h^2).$$

Так как $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.12) и следствию из него

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{df}{dx},$$

то отсюда следует, что разностное уравнение (2.30) при $y(x)$ удовлетворяется с точностью $O(h^2)$.

В отличие от (2.20) разностная схема (2.30) не позволяет явно выразить y_{j+1} через y_j . Схема Хьюна является неявной ($s = 1$).

Чтобы решить разностное уравнение, надо применить тот или иной итерационный процесс, используя в качестве начального приближения y_j . Однако это связано с затратами времени в зависимости от вида $f(x, y)$. Можно ограничиться двумя итерациями следующего вида. Сначала вычисляют первое приближение \tilde{y}_{j+1} по формуле Эйлера:

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad (2.31)$$

а затем, подставляя его в правую часть (2.30), находят значение y_{j+1} :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})]. \quad (2.32)$$

Фактически это означает, что вместо (2.30) используется следующее разностное уравнение:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))]. \quad (2.33)$$

Нетрудно убедиться, что разностное уравнение (2.33) аппроксимирует исходное (2.12) с точностью $O(h^2)$ и, в то же время, даёт явное выражение для определения y_{j+1} через y_j .

Отметим, что при проведении расчетов по формулам (2.31) и (2.32), можно контролировать точность получаемого решения путём сравнения значений \tilde{y}_{j+1} и y_{j+1} на каждом шаге вычислений. Если величина пересчёта $\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}$ слишком велика (мала), то это является сигналом о необходимости уменьшить (увеличить) шаг сетки h . Меняя h в соответствии с указанным правилом, можно поддерживать точность вычислений на определённом уровне.

Проиллюстрируем применение метода Эйлера на примере следующей задачи.

Пример 5. С помощью метода Эйлера составить таблицу значений решения задачи Коши для ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(0) = 1, x \in [0, 1].$$

Решение. Очевидно, что точное решение имеет вид:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Пусть $h = 0,1$ и рассматривается равномерная сетка

$$\bar{w}_h = \left\{ x_j \mid x_j = jh, j = \overline{0, N}; N = \frac{1}{h} \right\}.$$

Пользуясь формулой (2.21), будем последовательно получать y_1, \dots, y_{10} . Все вычисления представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

J	x_j	y_j	$hf(x_j, y_j)$	Точное решение $y(x_j) = e^{x_j^2/2}$
0	0	1	0	1
1	0,1	1	0,01	1,00501
2	0,2	1,01	0,0202	1,02020
3	0,3	1,0302	0,03091	1,04603
4	0,4	1,06111	0,04244	1,08329
5	0,5	1,10355	0,05518	1,13315
6	0,6	1,15873	0,06952	1,19722
7	0,7	1,22825	0,08598	1,27762
8	0,8	1,31423	0,10514	1,37713
9	0,9	1,41937	0,12774	1,49930
10	1	1,54711		1,64872

Из приведённой таблицы видно, что абсолютная и относительная погрешности, допущенные при нахождении решения, возрастают к концу таблицы. Например, в точке x_5 абсолютная погрешность

$$A_{x_5}^* = [1,10355 - 1,13315] = 0,0296,$$

а относительная

$$\Delta_{x_5}^* = \frac{A_{x_5}^*}{|y(x_5^*)|} = 2,61219\%.$$

В точке $x_{10} = 1,0$ соответственно будем иметь:

$$A_{x_{10}}^* = 0,10161, \Delta_{x_{10}}^* = 6,16296\%.$$

В заключение отметим, что метод Эйлера и метод Хьюна легко обобщаются на случай системы ОДУ [3]. Например, метод Эйлера для системы N ОДУ первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j}{h} = \bar{f}(x_j, \bar{y}_j), j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, x \in [0, 1], \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$\bar{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^T;$$

а

$$\bar{f}(x_j, \bar{y}_j) = (f_1(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}), \dots, f_n(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}))^T$$

или с помощью обозначения $f_j = f(x_j, \bar{y}_j)$ можно переписать следующим образом

$$\bar{f}_j = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Перепишем *метод Эйлера* для каждой компоненты вектора \bar{y}_j :

$$\begin{cases} \frac{y_{1,j+1} - y_{1,j}}{h} = f_{1,j}, \\ \frac{y_{2,j+1} - y_{2,j}}{h} = f_{2,j}, \\ \dots \\ \frac{y_{n,j+1} - y_{n,j}}{h} = f_{n,j}, j = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

$$y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \dots, y_n(0) = y_{n0}.$$

Аналогично можно записать метод Хьюна решения задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.

Покажем применение метода Эйлера в случае решения систем ОДУ на примере.

Пример 6. С помощью метода Эйлера определить численное решение задачи Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dx} = 3z, \end{cases}$$

$$y(0) = 2, z(0) = 1, x \in [0, 1].$$

Решение. Точное решение сформулированной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} y = e^{2x} + e^{3x}, \\ z = e^{3x}. \end{cases}$$

Выберем равномерную сетку

$\bar{\omega}_h = \{x_j \mid x_j = \overline{jh}, j = \overline{0, 10}; h = 0, 1\}$ и приведём результаты

численного решения задачи Коши в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

x_j	y_j	z_j	$y(x_j)$	$z(x_j)$
0	2	1	2	1
0,1	2,5	1,3	2,57126	1,34986
0,2	3,13	1,69	3,31394	1,82212
0,3	3,925	2,197	4,28172	2,4596
0,4	4,9297	2,8561	5,54566	3,32012
0,5	6,20125	3,71293	7,19997	4,48169
0,6	7,81279	4,82681	9,36976	6,04965
0,7	9,85803	6,27485	12,22137	8,16617
0,8	12,45712	8,1573	15,97621	11,02317
0,9	15,76427	10,60449	20,92938	14,87973
1	19,97757	13,78584	27,47459	20,08553

Сравнение численного и точного решений, значения которых в узлах сетки приведены в табл. 2.2, показывает, что абсолютная и относительная погрешности возрастают с увеличением номера узла. Например, для узла x_1 :

$$A_{y_1}^* = 0,07126; A_{z_1}^* = 0,04986;$$

$$\Delta_{y_1}^* = 2,7714\%; \Delta_{z_1}^* = 3,69372\%;$$

для узла x_5 :

$$A_{y_5}^* = 0,99872; A_{z_5}^* = 0,76876;$$

$$\Delta_{y_5}^* = 13,87117\%; \Delta_{z_5}^* = 17,15335\%;$$

для узла x_{10} :

$$A_{y_{10}}^* = 7,49702; A_{z_{10}}^* = 6,29969;$$

$$\Delta_{y_{10}}^* = 27,2871\%; \Delta_{z_{10}}^* = 31,36432\%.$$

Для улучшения результатов численного решения задачи имеются две возможности:

- 1) уменьшение шага сетки;
- 2) применение метода более высокого порядка точности.

В обоих случаях увеличивается число арифметических операций и время расчетов.

2.5. Методы Рунге-Кутты

Построим одношаговые численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), x \in [a, b], \\y(a) &= y_0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Считаем, что задача поставлена корректно [1]. На $[a, b]$ задана равномерная сетка $\overline{\Omega}_h$, как в примере 5.

Затем проинтегрируем уравнение на промежутке $[x_m, x_{m+1}]$.

Получим

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, y(t)) dt, m = 0, 1, 2, \dots, N-1.\tag{2.36}$$

Теперь достаточно указать эффективный способ вычисления интеграла в (2.36), чтобы получить вычислительное правило решения задачи (2.35). Так, если заменить интеграл в (2.36) по формуле левых прямоугольников, то получается классический метод Эйлера:

$$\begin{aligned}y(x_{m+1}) &= y(x_m) + h \cdot f(x_m, y_m), \\m &= 0, 1, \dots, N-1, y_0 - \text{задано.}\end{aligned}$$

Если использовать формулу правых прямоугольников или трапеций, то можно получить неявные методы Эйлера и Хьюна соответственно.

Существует общий способ, предложенный Рунге и Кутта, построения явных одношаговых вычислительных правил [2, с. 151-156], [3, с. 21-32], [4, с. 246-250], [6, с. 450-459], [7, с. 218-230].

Рассмотрим его. Пусть

$$\Delta y_m = y(x_{m+1}) - y(x_m).$$

Тогда (2.36) примет вид

$$\Delta y_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, y(t)) dt.\tag{2.37}$$

Чтобы перейти к промежутку интегрирования $[0, 1]$, введём в (2.37)

новую переменную $\alpha = \frac{t - x_m}{h}$.

Тогда вместо (2.37) получим

$$\Delta y_m = h \cdot \int_0^1 f(x_m + \alpha \cdot h, y(x_m + \alpha \cdot h)) d\alpha. \quad (2.38)$$

Задаем три группы параметров:

$$(\alpha) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q;$$

$$(\beta) : \begin{cases} \beta_{10}; \\ \beta_{20}, \beta_{21}; \\ \dots \\ \beta_{q0}, \beta_{q1}, \dots, \beta_{qq-1}; \end{cases}$$

$$(A) : A_0, A_1, \dots, A_q.$$

С помощью (α) и (β) определим величины :

$$k_0 = h \cdot f(x_m, y_m);$$

$$k_1 = h \cdot f(x_m + \alpha_1 \cdot h, y_m + \beta_{10} \cdot k_0);$$

$$k_q = h \cdot f(x_m + \alpha_q \cdot h, y_m + \beta_{q0} \cdot k_0 + \dots + \beta_{qq-1} \cdot k_{q-1}).$$

Все они могут быть последовательно вычислены, если параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{21}, \dots, \beta_{qq-1}$ известны.

Величины

$$k_i = h \cdot f(x_m + \alpha_i \cdot h, y_m + \beta_{i0} \cdot k_0 + \beta_{i1} \cdot k_1 + \dots + \beta_{ii-1} \cdot k_{i-1}), i = \overline{1, q},$$

можно рассматривать как приближённые значения подынтегральной функции $f(x_m + \alpha \cdot h, y(x_m + \alpha \cdot h))$, умноженные на h , если соответствующим образом подобрать параметры (β) .

Тогда при помощи набора (A) составим линейную комбинацию

$\sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i$, которой придадим смысл квадратурной суммы, полагая

$$\Delta y_m \cong \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i \quad (2.39)$$

Численный метод общего вида (2.39) для решения задачи (2.35) фактически построен. Осталось обсудить способ выбора параметров (α) , (β) , (A) .

Для этих целей введём в рассмотрение погрешность приближённого равенства (2.39):

$$r_q(h) = \Delta y_m - \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i. \quad (2.40)$$

Допустим, что функция $f(x, y(x))$ обладает достаточной гладкостью. Тогда для погрешности $r_q(h)$ будет справедливо разложение:

$$r_q(h) = \sum_{j=0}^p \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} r_q^{(p+1)}(\theta h), \quad (2.41)$$

где $0 < \theta < 1$. Из формулы (2.41) вытекает следующее: если параметры (α) , (β) , (A) подобраны так, что справедливо

$$r_q^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, p}, \quad (2.42)$$

то погрешность приближённого равенства (2.39) будет величиной порядка не ниже h^{p+1} , т.е.

$$r_q(h) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} r_q^{(p+1)}(\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Число p из равенства (2.42) называют *порядком точности* соответствующего численного метода.

Из проведённых выше рассуждений следуют два эквивалентных приёма получения параметров (α) , (β) , (A) .

1^{ый} приём. Величины $r_q^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, p}$, записывают через $f(x, y(x))$ и её частные производные и требуют выполнения $r_q^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, p}$, для любой достаточно гладкой $f(x, y(x))$ и при возможно большем p .

2^{ой} приём (эквивалентен первому). Параметры (α) , (β) , (A) подбирают так, чтобы разложения

$$\Delta y_m = y(x_m + h) - y(x_m) = hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \dots \text{ и } \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i$$

по степеням h совпадали до членов с наиболее высокими степенями h .

Обсуждать указанные приёмы построения вычислительных правил в общем случае трудно. Ограничимся рассмотрением конкретных примеров при $q = 0, 1, 2, 3$.

I. Метод первого порядка точности ($q = 0$). При $q = 0$ из (2.39) имеем:

$$\Delta y_m \cong A_0 \cdot k_0, \quad (2.43)$$

где $k_0 = hf(x_m, y_m)$.

Согласно формуле (2.40) погрешность в этом случае имеет вид:

$$r_0(h) = y(x_m + h) - y(x_m) - hA_0f(x_m, y_m).$$

Для определения значения A_0 воспользуемся первым приёмом и вычислим r'_0, r''_0, \dots . Получим

$$\begin{aligned} r'_0(h) &= y'(x_m + h) - A_0f(x_m, y_m), \\ r''_0(h) &= y''(x_m + h). \end{aligned}$$

Т.к. $r''_0(h)$ не зависит от A_0 , то не имеет смысла вычислять r'''_0, r''''_0, \dots . Ясно, что можно лишь требовать $r'_0(0) = 0$.

Тогда $p = 1$ и A_0 определяется из соотношения

$$f(x_m, y_m)(1 - A_0) = 0.$$

Следовательно, $A_0 = 1$. Из (2.43) получаем численный метод первого порядка точности для решения задачи (2.35):

Согласно формуле (2.41) локальная погрешность построенного правила имеет вид:

$$r_0(h) = \frac{h^2}{2!} r''_0(\theta h) = \frac{h^2}{2!} y''(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Итак, в случае $q = 0$ способ Рунге-Кутты построения одношаговых вычислительных правил решения задачи Коши приводит к явному методу Эйлера.

II. Метод второго порядка точности ($q = 1$). При $q = 1$ имеем приближённое равенство

$$\Delta y_m = hA_0f(x_m, y_m) + hA_1f(x_m + \alpha_1h, y_m + h\beta_{10}f(x_m, y_m)). \quad (2.44)$$

Для определения параметров $A_0, A_1, \alpha_1, \beta_{10}$ воспользуемся вторым приёмом и разложим Δy_m и $\sum_{i=0}^1 A_i \cdot k_i$ в ряд по степеням h . Будем иметь:

$$\Delta y_m = hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \dots$$

или

$$\begin{aligned} \Delta y_m = hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} [f_x + f_y f]_{(x_m, y_m)} + \\ + \frac{h^3}{3!} [f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_x + f_y f)]_{(x_m, y_m)} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_0 k_0 + A_1 k_1 = A_0 hf(x_m, y_m) + A_1 hf(x_m, y_m) + \\ + h^2 A_1 (f_x \alpha_1 + f_y \beta_{10} f)_{(x_m, y_m)} + \\ + \frac{h^3}{2} A_1 (f_{xx} \alpha_1^2 + f_{xy} \alpha_1 \beta_{10} f + f_{yx} \alpha_1 \beta_{10} f + f_{yy} \beta_{10}^2 f^2)_{(x_m, y_m)} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Сравниваем в (2.45) и (2.46) коэффициенты при h и h^2 . Получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ A_1 \alpha_1 = \frac{1}{2}, \\ A_1 \beta_{10} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.47)$$

При $q=1$ за счёт выбора $A_0, A_1, \alpha_1, \beta_{10}$ не удаётся добиться совпадения всех членов с h^3 в разложениях (2.45), (2.46). Следовательно, локальная погрешность любого построенного правила при $q=1$ есть $O(h^3)$, а сам метод будет второго порядка точности.

Из системы (2.47) находим:

$$\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1}, \quad A_0 = 1 - A_1. \quad (2.48)$$

Получается, что A_1 можно задавать числом, не равным нулю. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $A_1 = \frac{1}{2}$. Тогда $A_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \beta_{10} = 1$ и

$$\Delta y_m = \frac{(k_0 + k_1)}{2}, \quad (2.49)$$

причём $k_0 = hf(x_m, y_m)$, $k_1 = hf(x_m + h, y_m + k_0)$, а локальная погрешность имеет вид:

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} \left[f_y (f_x + f_y f) - \frac{1}{2} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f^2 f_{yy}) \right]_{(\tilde{x}_m, y(\tilde{x}_m))}, \quad (2.50)$$

$$x_m < \tilde{x}_m < x_{m+1}.$$

Вычислительное правило (2.49) называют методом Хьюна – это аналог квадратурной формулы трапеций.

Случай 2. Положим $A_1 = 1$. Тогда $A_0 = 0$, $\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2}$ и

$$\Delta y_m = k_1, \text{ где } k_0 = hf(x_m, y_m), k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right).$$

Получили вычислительное правило, аналогичное квадратурной формуле средних прямоугольников.

Случай 3. Пусть $A_1 = \frac{3}{4}$. Тогда $A_0 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{2}{3}$ и

$$\Delta y_m = \frac{(k_0 + 3k_1)}{4},$$

где $k_0 = hf(x_m, y_m)$, $k_1 = hf\left(x_m + \frac{2h}{3}, y_m + \frac{2k_0}{3}\right)$. В этом случае локальная погрешность имеет представление:

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} [f_y (f_x + f_y f)]_{(\tilde{x}_m, y(\tilde{x}_m))}.$$

Общая схема построения вычислительных правил третьего и более высокого порядка точности остается прежней, однако выкладки становятся громоздкими. Так, например, при выводе методов третьего порядка точности ($q = 2$) для определения параметров метода получается 6 уравнений на 8 неизвестных, а в случае методов четвертого порядка ($q = 3$) – 11 уравнений на 13 неизвестных. Другими словами, при $q > 2$ для определения неизвестных параметров получаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы имеют бесконечное множество решений. Из них выбирают решения, которые приводят к наиболее простым (экономичным) алгоритмам

методов Рунге-Кутты. Приведём без вывода примеры подобных методов [7, с. 224-230], [8, с. 294-304].

III. Методы третьего порядка точности ($q = 2$).

Случай 1.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf(x_m + h, y_m - k_0 + 2k_1).$$

Случай 2.

$$\Delta y_m = \frac{1}{4}(k_0 + 3k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{k_0}{3}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{2}{3}k_1\right).$$

Случай 3.

$$\Delta y_m = \frac{1}{9}(2k_0 + 3k_1 + 4k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}k_1\right).$$

IV. Методы четвёртого порядка точности ($q = 3$).

Случай 1.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad (2.51)$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_2).$$

Это одна из самых распространённых формул Рунге-Кутты, используемых в практических расчетах.

Случай 2.

$$\Delta y_m = \frac{1}{8}(k_0 + 3k_1 + 3k_2 + k_3),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{k_0}{3}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{2h}{3}, y_m - \frac{k_0}{2} + k_1\right),$$

$$k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_0 - k_1 + k_2).$$

Представленные формулы можно считать аналогом квадратурной формулы Симпсона.

Случай 3.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 4k_2 + k_3),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{k_0}{4}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_0 - 2k_1 + k_2).$$

Как следует из вышесказанного, увеличение q на единицу позволяет поднять точность методов на порядок. Однако при $q = 4$ повысить точность в вычислительных правилах по отношению к $q = 3$ не удаётся. Поэтому такие формулы не находят применения.

Увеличения точности методов можно достичь при значении $q \geq 5$. С примером правил Рунге-Кутты пятого порядка точности можно ознакомиться, например, в [3, с. 31], [9, с. 78-82]. В [9, с. 56-64] наглядно представлена геометрическая интерпретация методов

Рунге-Кутты первого, второго и четвёртого порядков точности. Повышение порядка точности численных одношаговых методов Рунге-Кутты приводит к быстрому возрастанию трудоёмкости вычислений, т.к. на одном шаге многократно приходится вычислять значения функции $f(x, y(x))$ при разных значениях аргументов. Заметим, однако, что методы более высокого порядка точности позволяют использовать больший шаг h . Этот факт может уменьшить общие вычислительные затраты. Кроме того, методы Рунге-Кутты дают возможность использования переменного шага сетки. Так как эффективная оценка погрешности методов Рунге-Кутты затруднительна, то на практике обычно на каждом шаге применяют двойной пересчёт. Суть его заключается в следующем. Исходя из точного значения $y(a) = y_0$, вычисляют $y(a + 2h)$ двумя способами: с шагом h и с двойным шагом $h_1 = 2h$. Если полученные значения различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для данного этапа расчёта выбран правильно. Полученное с его помощью значение решения можно принять за $y(x_1)$. В противном случае шаг уменьшается в два раза.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 7. Используя метод Рунге-Кутты (2.51), выбрать шаг для приближённого решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} y' &= x + y, x \in [0; 0,5], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Решение. Покажем начало процесса. Пусть $h = 0,1$. Вычислим $y_2 \approx y(0,2)$ с шагом h и $h_1 = 2h$. Последовательно получаем при $h = 0,1$:

$$\begin{aligned} k_0^{(0)} &= 0,1(0 + 1) = 0,1; \\ k_1^{(0)} &= 0,1(0,05 + 1 + 0,05) = 0,11; \\ k_2^{(0)} &= 0,1\left(0,05 + 1 + \frac{0,11}{2}\right) = 0,1105; \\ k_3^{(0)} &= 0,1(0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) \text{ и} \\ \Delta y_0 &= 0,11034. \end{aligned}$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,11034 = 1,11034.$$

Получили приближённое значение решения в точке $x = 0,1$.

Получим теперь значение y_2 .

Имеем

$$k_0^{(1)} = 0,1(0,1 + 1,11034) \approx 0,121;$$

$$k_1^{(1)} = 0,1 \left(0,15 + 1,11034 + \frac{0,121}{2} \right) \approx 0,1321;$$

$$k_2^{(1)} = 0,1 \left(0,15 + 1,11034 + \frac{0,1321}{2} \right) \approx 0,1326;$$

$$k_3^{(1)} = 0,1(0,2 + 1,11034 + 0,1326) \approx 0,1443;$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_0^{(1)} + 2k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + k_3^{(1)}) =$$

$$= \frac{1}{6} (0,121 + 2 \cdot 0,1321 + 2 \cdot 0,1326 + 0,1443) \approx 0,13245.$$

Тогда

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,11034 + 0,13245 = 1,24279.$$

Здесь $y_2 \approx y(0,2)$.

Получим это значение теперь с шагом $h_1 = 0,2$. Имеем

$$k_0 = 0,2(0 + 1) = 0,2;$$

$$k_1 = 0,2(0,1 + 1 + 0,1) = 0,24;$$

$$k_2 = 0,2(0,1 + 1 + 0,12) = 0,244;$$

$$k_3 = 0,2(0,2 + 1 + 0,244) = 0,2888.$$

Следовательно, $\Delta y = \frac{1}{6} (0,2 + 2 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,244 + 0,2888) = 0,2428$ и

$y(0,2) \approx 1,2428$. Сравнивая это значение с ранее полученным $y_2 = 1,24279$, находим, что они совпадают с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Заметим, что точное решение поставленной задачи Коши есть $y(x) = 2e^x - x - 1$. Его значение при $x = 0,2$ равно $y(0,2) = 2e^{0,2} - 0,2 - 1 = 2 \cdot 1,2214 - 1,2 = 1,2428$. Таким образом, дальнейшие расчёты на промежутке $[0;0,5]$ можно проводить с шагом $h = 0,1$. Как доказано в [7, с. 221-224], если метод Рунге-

Кутты аппроксимирует исходное уравнение, то он сходится при $h \rightarrow 0$, причём порядок точности совпадает с порядком погрешности аппроксимации. Здесь под погрешностью аппроксимации понимается выражение

$$-\frac{y_{m+1} - y_m}{h} + \sum_{i=0}^q A_i \sigma_i = \psi_m, \quad m = \overline{0, N-1},$$

где $\sigma_i = \frac{k_i}{h} = f(x_m + \alpha_i h, y_m + \beta_{i0} k_0 + \dots + \beta_{i,i-1} k_{i-1})$.

Все методы Рунге-Кутты обобщаются на системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y}), \quad x \in [a, b] \quad (2.52)$$

и начальные условия

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0. \quad (2.53)$$

Здесь

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad \bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T.$$

Выберем $h > 0$ и построим равномерную сетку

$$\bar{\omega}_n = \left\{ x_m \mid x_m = a + mh, m = \overline{0, N}, N = \frac{b-a}{h} \right\}.$$

Поставим задачу определения значения приближённого решения

$$\bar{y}_m \approx \bar{y}(x_m), \quad m = \overline{1, N}, \text{ по формулам}$$

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \Delta \bar{y}_m, \quad m = \overline{0, N-1},$$

где $\Delta \bar{y}_m$ вычисляется, например, по следующей формуле

(обобщение формулы (2.51) на случай систем дифференциальных уравнений):

$$\Delta \bar{y}_m = \frac{1}{6} \left(\bar{k}_0^{(m)} + 2\bar{k}_1^{(m)} + 2\bar{k}_2^{(m)} + \bar{k}_3^{(m)} \right),$$

$$\begin{aligned}
\overline{k_0^{(m)}} &= h\overline{f}(x_m, \overline{y_m}), \\
\overline{k_1^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + \frac{h}{2}, \overline{y_m} + \frac{\overline{k_0^{(m)}}}{2}\right), \\
\overline{k_2^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + \frac{h}{2}, \overline{y_m} + \frac{\overline{k_1^{(m)}}}{2}\right), \\
\overline{k_3^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + h, \overline{y_m} + \overline{k_2^{(m)}}\right),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$m = 0, N-1.$$

Итак, зная $\overline{y_0}$, по формулам (2.54) вычисляем $\overline{\Delta y_0}$, а затем находим $\overline{y_1} = \overline{y_0} + \overline{\Delta y_0}$. Принимая $(x_1, \overline{y_1})$ за исходные данные и повторяя тот же процесс, находим $\overline{y_2}$ и т.д.

Подобным образом любая вычислительная схема метода Рунге-Кутты для одного уравнения переносится на систему уравнений вида (2.52), (2.53).

Пример 8. Методом Рунге-Кутты получить численное решение уравнения колебаний маятника в сопротивляющейся среде (см. [2, с. 122]):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0, \quad t \in [0; 0,4] \tag{2.55}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= 0,3; \\
\frac{d\theta}{dt}(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Здесь $\theta(t)$ - угол отклонения маятника, t - время.

Решение. Положим $z = \frac{d\theta}{dt}$. Тогда уравнение (2.55) может быть

представлено в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -0,2z - 10 \sin \theta. \end{cases}$$

Начальные условия (2.56) переписутся так:

$$\begin{cases} \theta(0) = 0,3. \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\bar{y} = (\theta, z)^T$, $\bar{f} = (f_1, f_2)^T$, $f_1 = z$, $f_2 = -0,2z - 10 \sin \theta$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), t \in [0; 0,4], \\ \bar{y}_0 = (0,3; 0)^T. \end{cases} \quad (2.57)$$

Положим $h = \Delta t = 0,1$ и поставим задачу определения приближенных значений $\theta(t)$ в точках $0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ с помощью формул (2.54).

Для решения поставленной задачи была составлена программа на языке *высокого уровня*, результаты работы которой представлены в табл. 2.3. В основу программы положен следующий алгоритм:

1) по исходным данным $\theta(0) = 0,3; z(0) = 0$ сначала

вычислялись $\bar{k}_i^{(0)} = \begin{pmatrix} k_{i,0}^{(0)} \\ k_{i,z}^{(0)} \end{pmatrix}$ с помощью соответствующих формул из (2.54), $i = 0,1,2,3$;

2) по формулам $\Delta\theta = \frac{1}{6}(k_{0,0}^{(0)} + 2k_{1,0}^{(0)} + 2k_{2,0}^{(0)} + k_{3,0}^{(0)})$,

$\Delta z = \frac{1}{6}(k_{0,z}^{(0)} + 2k_{1,z}^{(0)} + 2k_{2,z}^{(0)} + k_{3,z}^{(0)})$, определялись приращения для θ и z ;

3) за значения $z(0,1); \theta(0,1)$ принимались соответственно значения $z(0) + \Delta z$, $\theta(0) + \Delta\theta$;

4) полученные в точке $t = 0,1$ значения принимались за исходные данные и по ним вычислялись $k_i^{(1)}$, затем новые значения Δz , $\Delta\theta$ и т.д. до тех пор, пока не получились значения решения в точке $t = 0,4$.

Таблица 2.3

t	θ	z	Δz	$\Delta\theta$
0	0,3	0	-0,28792	-0,01456
0,1	0,28544	-0,28792	-0,25503	-0,04192
0,2	0,24352	-0,54295	-0,19818	-0,06476
0,3	0,17876	-0,74113	-0,12263	-0,08093
0,4	0,09783	-0,86376	-	-

Из табл. 2.3 видно, что значения угла отклонения $\theta(t)$ маятника в сопротивляющейся среде с течением времени убывают, что соответствует физике рассматриваемого процесса.

С другими примерами численного решения задачи Коши в случае одного ОДУ, систем ОДУ первого порядка, дифференциального уравнения и систем дифференциальных уравнений высших порядков с применением методов Рунге-Кутты можно ознакомиться в [10, с.133-149].

2.6. Многошаговые методы решения задачи Коши

В одношаговых методах решения задачи Коши для одного уравнения

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

которую считаем корректно поставленной [1], значение y_{m+1} зависит только от информации о решении в предыдущей точке сетки x_m , $m = 0, 1, \dots$.

Вполне вероятно, что можно добиться повышения точности, если использовать информацию о решении в нескольких предыдущих точках сетки $x_m, x_{m-1}, x_{m-2}, \dots$. Иногда оказывается целесообразным привлекать информацию с забеганием вперед за точку x_{m+1} . Подобные методы, поименованные ранее *многошаговыми*, могут быть получены несколькими способами [2, с. 156-163], [3, с. 72-93], [4, с. 250-253], [6, с. 466-471], [7, с. 230-247], [8, с. 327-336], [9, с. 94-130].

Так как использование многошаговых методов на неравномерных сетках усложняется, ограничимся случаем равномерной сетки

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_m \mid x_m = a + mh, m = \overline{0, N}, N = \frac{b-a}{h} \right\}.$$

Как и в случае одношаговых методов, проинтегрируем уравнение из (2.58) на одном шаге и сделаем замену переменных. Получим

$$y(x_m + h) - y(x_m) = h \int_0^1 f(x_m + \alpha h, y(x_m + \alpha h)) d\alpha, \quad (2.59)$$

где $\alpha = \frac{t - x_m}{h}$, $x_m \in \bar{\omega}_h$, $m = \overline{0, N-1}$.

На основании формулы (2.59) будем строить многошаговые численные методы.

По введенной в [3] классификации для многошаговых методов справедлива формула:

$$y_{m+1} = F(y_{m-q}, y_{m-q+1}, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+S}),$$

где принимают $q \geq 1$ и $S = 0$ или $S = 1$ или $S > 1$.

Воспользуемся этим фактом и заменим интеграл в (2.59) квадратурной суммой

$$\sum_{i=-S}^q A_i f(x_m + \alpha_i h, y(x_m + \alpha_i h)).$$

Тогда на основе (2.59) получим вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h). \quad (2.60)$$

Формула (2.60) содержит $2(q + S + 1)$ неизвестных параметров A_i , α_i . Для их определения потребуем, чтобы разложения

$\Delta y_m = y(x_m + h) - y(x_m)$ и $h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h)$ в ряд по степеням h

имели совпадающие коэффициенты при одинаковых степенях.

Будем иметь:

$$\Delta y_m = h y'(x_m) + \frac{h^2}{2!} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \dots, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h) &= h [A_{-S} y'(x_m + \alpha_{-S} h) + \\
&+ A_{-S+1} y'(x_m + \alpha_{-S+1} h) + \dots + A_0 y'(x_m + \alpha_0 h) + \dots + \\
&+ A_q y'(x_m + \alpha_q h)] = h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m) + h^2 \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i y''(x_m) + \\
&+ \frac{h^3}{2} \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^2 y'''(x_m) + \dots
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=-S}^q A_i = 1; \quad \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i = \frac{1}{2}; \quad \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}$$

и т.д..

Вообще,

$$\sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, 2(q+S+1)-1}. \tag{2.63}$$

Обозначим через $r_{m+1}^{(q,S)}$ погрешность многошаговых вычислительных правил, параметры которых находятся как решение системы (2.63). Она будет включать в себя остаточные члены разложений (2.61), (2.62) и может быть представлена так:

$$\begin{aligned}
r_{m+1}^{(q,S)} &= h^{2(q+S+1)+1} y_{(x_m+\theta h)}^{(2(q+S+1)+1)} \left[\frac{1}{(2(q+S+1)+1)!} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{(2(q+S+1))!} \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^{(2(q+S+1))} \right], \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Система (2.63) относительно A_i, α_i является нелинейной. Её можно линеаризовать, положив заранее $\alpha_i = -i$. Такой выбор α_i оправдан тем, что речь идет о построении многошаговых правил, в которых наряду с x_m могут использоваться узлы x_{m-1}, x_{m-2}, \dots , а также x_{m+1}, x_{m+2}, \dots .

Итак, если $\alpha_i = -i$, то для вычисления A_i получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=-S}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, q+S}. \tag{2.65}$$

Погрешность при этом принимает вид:

$$r_{m+1}^{(q,S)} = h^{q+S+2} y_{(x_m+\theta h)}^{(q+S+2)} \left[\frac{1}{(q+S+2)!} - \frac{1}{(q+S+1)!} \sum_{i=S}^q A_i (-i)^{q+S+1} \right], \quad (2.66)$$

где $0 < \theta < 1$. Заметим, что определитель системы (2.65) есть определитель Вандермонда и, следовательно, система относительно A_i имеет единственное решение.

Рассмотренный метод численного интегрирования задачи Коши для ОДУ был разработан Адамсом в 1855г по просьбе английского баллистика Башфорта [2]. Впоследствии метод был забыт и заново открыт норвежским математиком Штёрмером.

Определение 2. При $S = 0$ вычислительные правила носят название *экстраполяционных формул Адамса* или *явных многошаговых правил Адамса-Башфорта*; при $S = 1$ – *интерполяционных формул Адамса* или *неявных формул Адамса-Моултона*; при $S = 2$ – *формулу типа Коуэлла с забеганием вперед*.

Приведем примеры многошаговых вычислительных правил, придавая S и q различные значения.

2.6.1. Экстраполяционные формулы ($S = 0$)

Случай $q = 0$. Из системы (2.65) определяем $A_0 = 1$. На основе (2.60) получаем *явную формулу Эйлера*

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m); \quad m = \overline{0, N-1},$$

с погрешностью

$$r_{m+1}^{(0,0)} = \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 1$. Теперь заданы $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, а требуется найти A_0 , A_1 из системы:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ A_0 \cdot (0) + A_1 \cdot (-1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем $A_0 = \frac{3}{2}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ и двухшаговое явное вычислительное правило:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [3f_m - f_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (2.67)$$

Чтобы проводить по нему вычисления, кроме y_0 следует знать y_1 . Погрешность правила (2.67) определяется из (2.66) с учетом значений $\alpha_0, \alpha_1, A_0, A_1, q, S$ и имеет вид:

$$r_{m+1}^{(1,0)} = \frac{5}{12} h^3 y^{(3)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

При других значениях q выкладки проводятся аналогично. Приведем без вывода примеры экстраполяционных формул при $q > 1$.

Случай $q = 2$. Имеем $A_0 = \frac{23}{12}$, $A_1 = -\frac{4}{3}$, $A_2 = \frac{5}{12}$ и тогда

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12} [23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}], \quad m = \overline{2, N-1}.$$

Погрешность приведенного правила есть

$$r_{m+1}^{(2,0)} = \frac{3}{8} h^4 y^{(4)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Очевидно, что для проведения расчетов по данному правилу требуется знать y_0, y_1, y_2 – приближенные значения решения в узлах $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$.

Случай $q = 3$. Задаем $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -3$ и находим $A_i, i = \overline{0, 3}$, как решения системы четырех линейных уравнений. В результате получаем вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} (55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}), \quad m = \overline{3, N-1},$$

погрешность которого имеет вид

$$r_{m+1}^{(3,0)} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Чтобы проводить вычисления по представленному правилу, требуется задать приближенные значения решения y_i в узлах $x_i, i = \overline{0, 3}$.

Примеры других явных экстраполяционных формул Адамса можно найти, например, в [9, с. 105-106].

2.6.2. Интерполяционные формулы ($S = 1$)

Множество неявных формул Адамса-Моултона при заданных $\alpha_i = -i$ определяется разнообразием значений коэффициентов A_i , которые получаются из решения СЛАУ:

$$\sum_{i=-1}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, q+1}. \quad (2.68)$$

Погрешность вычислительных правил следует из (2.66) и представима в виде:

$$r_{m+1}^{(q,1)} = h^{q+3} y^{(q+3)}(x_m + \theta h) \left[\frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!} \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^{q+2} \right]. \quad (2.69)$$

Очевидно, что q может принимать значения $-1, 0, 1, \dots$

Случай $q = -1$. Тогда $A_{-1} = 1$, $\alpha_{-1} = 1$ и

$$y_{m+1} = y_m + hf_{m+1}, \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Получается *неявное одношаговое правило Эйлера* с погрешностью

$$r_{m+1}^{(-1,1)} = -\frac{1}{2} h^2 y^{(2)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 0$. Имеем $\alpha_{-1} = 1, \alpha_0 = 0$, а коэффициенты A_{-1}, A_0 определяются из СЛАУ:

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 = 1, \\ A_{-1} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $A_0 = A_{-1} = \frac{1}{2}$ и

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [f_m + f_{m+1}], \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Построено *одношаговое неявное правило Эйлера* (аналог формулы трапеций) с погрешностью на одном шаге

$$r_{m+1}^{(0,1)} = -\frac{1}{12} h^3 y^{(3)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 1$. Полагаем $\alpha_{-1} = 1, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1$, а A_{-1}, A_0, A_1 определяются как решения СЛАУ из трех уравнений:

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 1; \\ A_{-1} - A_1 = \frac{1}{2}; \\ A_{-1} + A_1 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отсюда находим $A_{-1} = \frac{5}{12}, A_0 = \frac{8}{12}, A_1 = -\frac{1}{12}$.

Из формулы (2.60) следует вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1}), \quad m = \overline{1, N-1},$$

с погрешностью

$$r_{m+1}^{(1,1)} = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 2$. Не будем подробно останавливаться на выводе правила в этом случае. Укажем окончательный результат:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}(9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}), \quad m = \overline{2, N-1}.$$

Погрешность имеет вид:

$$r_{m+1}^{(2,1)} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Примеры неявных формул Адамса при других значениях q можно найти, например, в [9, с. 106-107].

Сделаем несколько важных замечаний относительно использования формул Адамса в практических расчетах:

1) Как следует из приведенных выше выкладок, счет в явных и неявных формулах Адамса следует начинать с $m = q$. При этом кроме y_0 требуется знать y_1, y_2, \dots, y_q . Недостающие значения y_i , $i = \overline{1, q}$, можно получить любым одношаговым методом. Однако желательно выбрать правило, согласованное по точности с формулами Адамса.

2) Интерполяционные формулы Адамса не дают явного выражения для y_{m+1} . Для проведения вычислений по интерполяционным формулам требуется сначала задать $y_{m+1}^{[0]}$ — начальное значение решения в точке x_{m+1} . Его можно найти,

например, по явной экстраполяционной формуле Адамса («прогноз»), а затем по неявной формуле уточнить («коррекция»). Вычислительный процесс тогда приобретает характер «предиктор-корректор», причем, коррекцию можно проводить не один раз, а до получения заданной точности. Рекомендуется использовать явные и неявные формулы Адамса одного порядка точности.

3) Так как при $q \geq 1$ исходных данных в поставленной задаче недостаточно для корректного проведения расчетов, то формулы Адамса относят к классу некорректно поставленных задач. Однако замеченный недостаток легко исправляется с помощью одношаговых методов.

4) Формулы Адамса легко обобщаются на системы ОДУ и положены в основу стандартных программ для ЭВМ (с автоматическим выбором шага интегрирования h).

2.6.3. Многошаговые правила с забеганием вперед ($S = 2$)

Построим *многошаговое правило типа Коуэлла* [3, с.85-93] при $S = 2$ и $q = 1$, воспользовавшись изложенной выше теорией.

Полагая $\alpha_i = -i$, $i = \overline{-2, q}$, коэффициенты A_i из формулы (5.60) определяем как решения следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 = 1; \\ 2A_{-2} + A_{-1} - A_1 = \frac{1}{2}; \\ 4A_{-2} + A_{-1} + A_1 = \frac{1}{3}; \\ 8A_{-2} + A_{-1} - A_1 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Из нее получаем: $A_0 = \frac{13}{24}$, $A_1 = -\frac{1}{24}$, $A_{-1} = \frac{13}{24}$, $A_{-2} = -\frac{1}{24}$.

Следовательно, *вычислительное правило типа Коуэлла с забеганием вперед* имеет вид:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} (-f_{m+2} + 13f_{m+1} + 13f_m - f_{m-1}), \quad m = \overline{1, N-2}. \quad (2.70)$$

Погрешность построенного правила следует из (5.66):

$$r_{m+1}^{(1,2)} = \frac{11}{720} h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.71)$$

Очевидно, что явного выражения для значения y_{m+1} через известные значения не получилось. Однако, в построенной формуле (2.70) используется информация о решении, которая симметрично расположена относительно отрезка $[x_m, x_{m+1}]$. Этот факт благоприятно сказывается на точности: в выражении погрешности коэффициент при $h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h)$ оказался меньше по модулю, чем в формулах Адамса порядка точности $O(h^5)$. В формуле (2.70) вычисляемое значение y_{m+1} выражается через значения $y_m, y_{m\pm 1}$ и y_{m+2} . Чтобы использовать построенное правило в расчетах, требуется специальная организация вычислений. Она может быть, например, такой:

1) счет в формуле (2.70) начинаем с $m = 1$, вычислив с помощью одношаговых методов значение y_1 ;

2) по экстраполяционной формуле Адамса при $q = 1$ вычисляем

$$y_2^{[1]} = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

с точностью $O(h^3)$, где $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$;

3) по интерполяционной формуле Адамса ($q = 1$) уточняем значение

$$y_2^{[2]} = y_1 + \frac{h}{12}(5f_2^{[1]} + 8f_1 - f_0)$$

с точностью $O(h^4)$. Здесь $f_2^{[1]} = f(x_2, y_2^{[1]})$, $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$;

4) по экстраполяционной формуле Адамса ($q = 2$) находим значение

$$y_3^{[1]} = y_2^{[2]} + \frac{h}{12}(23f_2^{[2]} - 16f_1 + 5f_0)$$

с погрешностью $O(h^4)$, где $f_2^{[2]} = f(x_2, y_2^{[2]})$;

5) по формуле (2.70) получаем значение в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{24}(-f_3^{[1]} + 13f_2^{[2]} + 13f_1 - f_0)$$

с погрешностью $O(h^5)$. При этом $f_3^{[1]} = f(x_3, y_3^{[1]})$.

Заметим, что вычисления можно организовать и по-другому [3, с.89-93]. Здесь описаны действия для получения значения решения в одной точке. Чтобы найти значения решения в других точках, требуется многократно повторить действия со 2-го по 5-ый пункты.

2.6.4. Метод Милна

Метод Милна [2, с.168-181], [9, с.109-110] прост и практически удобен при численном интегрировании задачи Коши для ОДУ первого порядка и систем таких уравнений. Проведем рассмотрение метода на примере одного уравнения (2.58) в случае равномерной сетки с шагом $h > 0$. Будем считать, что каким-либо одношаговым методом получен начальный отрезок решения-значения y_0, y_1, y_2, y_3 . Тогда известны $y'_i, i = 0, 1, 2, 3$.

С помощью конечных разностей до третьего порядка включительно запишем первую интерполяционную формулу Ньютона [8] для производной y' . Будем иметь:

$$y'(t) = y'_k + t\Delta y'_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y'_k + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y'_k, \quad (2.72)$$

где $t = \frac{x-x_k}{h}$, $x_k \in \bar{\omega}_h$ – подходящая точка.

Положим в (2.72) $k = m-4$ и почленно проинтегрируем в пределах от x_{m-4} до x_m . Получим:

$$\int_{x_{m-4}}^{x_m} y' dx = \int_{x_{m-4}}^{x_m} \left[y'_{m-4} + t\Delta y'_{m-4} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y'_{m-4} \right] dx.$$

Так как $t = \frac{x-x_{m-4}}{h}$, $dx = hdt$, то отсюда находим:

$$\begin{aligned} y_m - y_{m-4} &= h \left[y'_{m-4} \int_0^4 dt + \Delta y'_{m-4} \int_0^4 t dt + \Delta^2 y'_{m-4} \int_0^4 \frac{t^2-t}{2} dt + \right. \\ &\quad \left. + \Delta^3 y'_{m-4} \int_0^4 \frac{t^3-3t^2+2t}{6} dt \right] = \\ &= h \left[4y'_{m-4} + 8\Delta y'_{m-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{m-4} \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}\Delta y'_{m-4} &= y'_{m-3} - y'_{m-4}, \\ \Delta^2 y'_{m-4} &= y'_{m-2} - 2y'_{m-3} + y'_{m-4}, \\ \Delta^3 y'_{m-4} &= y'_{m-1} - 3y'_{m-2} + 3y'_{m-3} - y'_{m-4}.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в формулу (2.73) и после преобразований получим *первую формулу Милна*:

$$y_m = y_{m-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{m-3} - y'_{m-2} + 2y'_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N. \quad (2.74)$$

Здесь $y'_{m-i} = f(x_{m-i}, y_{m-i})$, $i = 1, 2, 3$.

На основе формулы (2.72), полагая $k = m - 2$, построим *вторую формулу Милна*, интегрируя по x обе части получившегося выражения в пределах от x_{m-2} до x_m . Будем иметь

$$\int_{x_{m-2}}^{x_m} y' dx = h \int_0^2 \left[y'_{m-2} + t \Delta y'_{m-2} + \frac{t^2 - t}{2} \Delta^2 y'_{m-2} + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6} \Delta^3 y'_{m-2} \right] dt,$$

т.к. $t = \frac{x - x_{m-2}}{h}$, $dx = h dt$.

После вычислений интегралов отсюда находим:

$$y_m - y_{m-2} = h \left(2y'_{m-2} + 2\Delta y'_{m-2} + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{m-2} \right). \quad (2.75)$$

Так как по определению конечных разностей

$$\begin{aligned}\Delta y'_{m-2} &= y'_{m-1} - y'_{m-2}, \\ \Delta^2 y'_{m-2} &= \Delta y'_{m-1} - \Delta y'_{m-2} = y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2},\end{aligned}$$

то, подставляя эти соотношения в формулу (2.75), выводим *вторую формулу Милна*:

$$y_m = y_{m-2} + \frac{h}{3}(y'_{m-2} + 4y'_{m-1} + y'_m), \quad m = 2, 3, \dots, N. \quad (2.76)$$

Оценим главные члены погрешностей $\varepsilon_m^{[1]}$ и $\varepsilon_m^{[2]}$ первой и второй формул Милна. Учтем, что в формуле (5.72) были отброшены конечные разности четвертого и более высокого порядка. Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^{[1]} &\approx h \int_0^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y'_{m-4} dt = \\ &= h \int_0^4 \frac{1}{24} (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \Delta^4 y'_{m-4} dt = \frac{28}{90} h \Delta^4 y'_{m-4},\end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_m^{[2]} \approx h \int_0^2 \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24} \Delta^4 y'_{m-2} dt = -\frac{h}{90} \Delta^4 y'_{m-2}. \quad (2.78)$$

Примем, что конечная разность $\Delta^4 y'_m$ постоянна на интервале длины $4h$. Тогда получим

$$\varepsilon_m^{[1]} = -28\varepsilon_m^{[2]}.$$

Формулы (2.74) и (2.76) в расчетах будем использовать вместе, предсказывая $y_m^{[1]}$ по формуле (2.74), а затем уточняя $y_m^{[1]}$ по формуле (2.76) (получается значение $y_m^{[2]}$). Очевидно, что

$$y_m = y_m^{[1]} + \varepsilon_m^{[1]} = y_m^{[1]} - 28\varepsilon_m^{[2]}$$

и

$$y_m = y_m^{[2]} + \varepsilon_m^{[2]}.$$

Тогда

$$y_m^{[2]} + \varepsilon_m^{[2]} = y_m^{[1]} - 28\varepsilon_m^{[2]}$$

и

$$\varepsilon_m^{[2]} = \frac{y_m^{[1]} - y_m^{[2]}}{29}. \quad (2.79)$$

Получена *контрольная формула Милна*:

$$|\varepsilon_m| = \frac{|y_m^{[1]} - y_m^{[2]}|}{29}$$

Можно доказать, что суммарная ошибка метода Милна есть величина порядка h^4 .

В самом деле, если шаг h достаточно мал, то можно принять

$$\frac{\Delta^4 y'_m}{h^4} \approx (y')_{x_m}^{IV} = y^{(5)}(x_m).$$

Из формул (2.77), (2.78) следует, что предельная абсолютная погрешность на $[a, b]$ приближенного решения $y_m \approx y(x_m)$,

$m = \overline{0, N}$, выражается формулой:

$$E = \frac{h^5}{90} M_5 N = \frac{b-a}{90} h^4 M_5,$$

где $M_5 = \max_{x \in [a, b]} |y^{(5)}(x)|$.

Обсудим теперь алгоритм вычислений по формулам Милна (2.74), (2.76).

Он состоит в следующем:

1) зная y_0 , по какой-либо формуле для одношаговых методов находим y_1, y_2, y_3 . Это может быть метод Рунге-Кутты третьего или четвертого порядка точности;

2) вычисляем $y_m^{[1]}$, $m = 4, 5, \dots$, по первой формуле Милна

$$y_m^{[1]} = y_{m-4} + \frac{4h}{3}(2f_{m-3} - f_{m-2} + 2f_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N,$$

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad i = m-3, m-2, m-1;$$

3) найденное значение $y_m^{[1]}$ подставляем в исходное уравнение и находим

$$y_m'^{[1]} = f(x_m, y_m^{[1]}) \equiv f_m;$$

4) по второй формуле Милна получаем $y_m^{[2]}$:

$$y_m^{[2]} = y_{m-2} + \frac{h}{3}(f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m), \quad m = 4, 5, \dots, N;$$

5) вычисляем

$$\varepsilon_m = \frac{1}{29} |y_m^{[2]} - y_m^{[1]}|.$$

Если $\varepsilon_m \leq \varepsilon$, где ε – принятая точность вычислений, то полагаем

$$y_m \approx y_m^{[2]}, \quad y_m' \approx f(x_m, y_m^{[2]})$$

и переходим к следующей точке сетки. Если $\varepsilon_m > \varepsilon$ и точность не достигнута, следует уменьшить шаг h . При этом потребуются пересчитать начальные значения y_1, y_2, y_3 , что можно отнести к недостаткам метода Милна.

Отметим, что метод Милна без особых проблем, так же как и методы Адамса, обобщается на случай задачи Коши для систем ОДУ.

В самом деле, пусть речь идет о решении системы ОДУ нормального вида:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \quad x \in [a, b],$$

$$\text{где } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

При этом поставлена задача Коши: найти решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$, удовлетворяющее указанной системе ОДУ первого порядка и начальному условию:

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0, \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{pmatrix} - \text{задано.}$$

Все многошаговые методы, рассмотренные выше для одного уравнения первого порядка, переносятся на системы ОДУ первого порядка, если в соответствующих формулах заменить $y(x)$ и $f(x, y)$ на $\bar{y}(x)$, $\bar{f}(x, \bar{y}(x))$.

Так, например, явное двухшаговое вычислительное правило (5.67), предназначенное для системы ОДУ первого порядка, будет иметь вид:

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \frac{h}{2} [3\bar{f}_m - \bar{f}_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1},$$

где

$$\bar{y}_m = \begin{pmatrix} y_{1,m} \\ y_{2,m} \\ \dots \\ y_{n,m} \end{pmatrix}, \bar{f}_m = \begin{pmatrix} f_1(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \\ f_1(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно записать двухшаговое неявное правило Адамса:

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \frac{h}{12} [5\bar{f}_{m+1} + 8\bar{f}_m - \bar{f}_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1}.$$

В случае систем ОДУ первого порядка первая и вторая формулы Милна примут вид:

$$\bar{y}_m = \bar{y}_{m-4} + \frac{4h}{3} (2\bar{f}_{m-3} - \bar{f}_{m-2} + 2\bar{f}_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N,$$

$$\bar{f}_{m-i} = f(x_{m-i}, \bar{y}_{m-i}), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\bar{y}_m = \bar{y}_{m-2} + \frac{h}{3} (\bar{f}_{m-2} + 4\bar{f}_{m-1} + \bar{f}_m), \quad m = 2, 3, \dots, N.$$

Пример 9. Методом Милна найти численное решение задачи Коши:

$$y' = x + y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0) = 1.$$

Решение. Для численного решения поставленной задачи воспользуемся формулами (2.74), (2.76). Выберем $h = 0,1$ и на $[0, 1]$ зададим равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = i \cdot h, i = \overline{0, 10}, h = 0,1\}.$$

С помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [13] построим начало таблицы:

$$y_0 = 1;$$

$$y_1 = 1,11034;$$

$$y_2 = 1,24280;$$

$$y_3 = 1,39971.$$

Дальнейшие вычисления проводим по формулам (2.74), (2.76) согласно описанному выше алгоритму: по первой формуле Милна значения предсказываем, а по второй – уточняем, требуя, чтобы

$$\varepsilon_m \leq \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = 10^{-3}, \quad \varepsilon_m = \frac{1}{29} |y_m^{[2]} - y_m^{[1]}|, \quad m = 4, 5, \dots, 10.$$

Все вычисления помещены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

m	x_m	y_m	Погрешность
0	0	1,00000	0
1	0,1	1,11034	$0,17 \cdot 10^{-6}$
2	0,2	1,24280	$0,37 \cdot 10^{-6}$
3	0,3	1,39971	$0,62 \cdot 10^{-6}$
4	0,4	1,58364	$0,43 \cdot 10^{-6}$
5	0,5	1,79744	$0,66 \cdot 10^{-6}$
6	0,6	2,04423	$0,50 \cdot 10^{-6}$
7	0,7	2,32750	$0,71 \cdot 10^{-6}$
8	0,8	2,65108	$0,56 \cdot 10^{-6}$
9	0,9	3,01920	$0,76 \cdot 10^{-6}$
10	1,0	3,43656	$0,62 \cdot 10^{-6}$

В последнем столбце табл. 2.4 представлена погрешность-разность между численным и аналитическим решением – в узлах сетки, взятая по модулю. Точное решение поставленной задачи имеет вид:

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Как следует из таблицы, погрешность не превосходит 10^{-5} , причем, эта точность достигается всего за 1 итерацию.

Пример 10. Экстраполяционным методом Адамса продолжить таблицу значений решения, полученного с помощью одношагового метода Рунге-Кутты при численном решении задачи Коши для следующей системы ОДУ:

$$\begin{cases} w' = z - \cos x, \\ z' = w + \sin x, \quad x \in [0, 1]; \\ w(0) = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases}$$

Используя интерполяционный метод Адамса, уточнить с заданной точностью ε значения решения, найденные экстраполяционным методом Адамса.

Решение. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ первого порядка. Ищется вектор-функция $\bar{y}(x)$, удовлетворяющая системе ОДУ нормального вида

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \quad x \in [a, b],$$

и начальному условию

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0,$$

где

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

$$\bar{f} = (f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n))^T.$$

Для определения численного решения задачи Коши воспользуемся вышеприведенными формулами метода Рунге-Кутты ($q = 4$), явного и неявного методов Адамса ($q = 2$), записав их для случая системы двух ОДУ ($n = 2$). Выбирая шаг сетки $h = 0,1$, покроем промежуток $[a, b] = [0, 1]$ равномерной сеткой

$$\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = i \cdot h, i = \overline{0, 10}, h = 0, 1\}.$$

Запишем метод Рунге-Кутты для случая $q = 4$, $n = 2$:

$$w_{i+1} = w_i + \Delta w_i, \quad \Delta w_i = \frac{h}{6}(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i),$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad \Delta z_i = \frac{h}{6}(\xi_1^i + 2\xi_2^i + 2\xi_3^i + \xi_4^i),$$

где

$$\eta_1^i = f_1(x_i, w_i, z_i), \quad \xi_1^i = f_2(x_i, w_i, z_i),$$

$$\eta_2^i = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_1^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_1^i\right), \quad \xi_2^i = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_1^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_1^i\right),$$

$$\eta_3^i = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_2^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_2^i\right),$$

$$\xi_3^i = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_2^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_2^i\right),$$

$$\eta_4^i = f_1(x_i + h, w_i + h\eta_3^i, z_i + h\xi_3^i), \quad \xi_4^i = f_2(x_i + h, w_i + h\eta_3^i, z_i + h\xi_3^i).$$

$$f_1(x, w, z) = z - \cos x, \quad f_2(x, w, z) = w - \sin x.$$

Экстраполяционный метод Адамса (явный, случай $q = 2$) имеет вид:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} (23f_{1,i} - 16f_{1,i-1} + 5f_{1,i-2}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{12} (23f_{2,i} - 16f_{2,i-1} + 5f_{2,i-2}), \quad i = \overline{2, N-1}, \quad N = 10,$$

причем

$$f_{k,i} = f_k(x_i, w_i, z_i), \quad k = 1, 2.$$

Погрешность метода оценивается по следующей формуле:

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,0)} = \frac{3}{8} h^4 \bar{y}^{-(4)}(x_i + \theta \cdot h), \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{где } \bar{y} = (w, z)^T;$$

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,0)} = (r_{1,i+1}^{(2,0)}, r_{2,i+1}^{(2,0)})^T.$$

Интерполяционный метод Адамса (случай $q = 2$) рассматривается в виде:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} (9f_{1,i+1} + 19f_{1,i} - 5f_{1,i-1} + f_{1,i-2}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{24} (9f_{2,i+1} + 19f_{2,i} - 5f_{2,i-1} + f_{2,i-2}), \quad i = \overline{2, N-1},$$

а погрешность метода равна

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,2)} = -\frac{19}{720} h^5 \bar{y}^{-(5)}(x_i + \theta \cdot h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Вычисления по обеим формулам Адамса начинаются с $i = q = 2$, причем для проведения расчетов кроме начального значения $\bar{y}_0 = (w_0, z_0)^T$ требуется задать «начальный отрезок» значений \bar{y}_1, \bar{y}_2 . Недостающие значения $\bar{y}_i = (w_i, z_i)^T, i = 1, 2$, можно определить с помощью любого одношагового метода. Например, воспользуемся вышеприведенным методом Рунге-Кутты ($q = 4$) и определим значения решения для нашей системы (табл. 2.5):

Таблица 2.5

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,0000000	0,00000000
1	0,1	-0,0998334	0,00000000
2	0,2	-0,1986693	0,00000001
3	0,3	-0,2955201	0,00000002
4	0,4	-0,3894182	0,00000004
5	0,5	-0,4794254	0,00000006
6	0,6	-0,5646423	0,00000009
7	0,7	-0,6442175	0,00000012
8	0,8	-0,7173559	0,00000016
9	0,9	-0,7833267	0,00000020
10	1,0	-0,8414708	0,00000025

Проверка полученных результатов на достоверность проводилась с помощью процедуры rkfixed в Mathcad 8. Результаты работы процедуры помещены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

i	x_i	y_i	z_i
0	0	0	0
1	0,1	-0,0998334	$-1,0417183 \cdot 10^{-9}$
2	0,2	-0,1986693	$-7,6195823 \cdot 10^{-9}$
3	0,3	-0,2955201	$-1,9681726 \cdot 10^{-8}$
4	0,4	-0,3894182	$-3,7177137 \cdot 10^{-8}$
5	0,5	-0,4794254	$-6,0056861 \cdot 10^{-8}$
6	0,6	-0,5646423	$-8,8275752 \cdot 10^{-8}$
7	0,7	-0,6442175	$-1,2179476 \cdot 10^{-7}$
8	0,8	-0,7173559	$-1,6058374 \cdot 10^{-7}$
9	0,9	-0,7833267	$-2,0462483 \cdot 10^{-7}$
10	1,0	-0,8414708	$-2,5391631 \cdot 10^{-7}$

В пределах точности $\varepsilon = 10^{-5}$ результаты совпадают. Выбираем «начальный отрезок» из табл. 2.5:

$$w_0 = 0, z_0 = 0, w_1 = -0,0998334,$$

$$z_1 = 0, w_2 = -0,1986693, z_2 = 0.$$

Воспользуемся явным методом Адамса. В результате получим решение, помещенное в табл. 2.7:

Таблица 2.7

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,000000	0,000000
1	0,1	-0,099833	0,000000
2	0,2	-0,198669	0,000000
3	0,3	-0,295515	0,000000
4	0,4	-0,389404	0,000001
5	0,5	-0,479398	0,000003
6	0,6	-0,564598	0,000007
7	0,7	-0,644153	0,000012
8	0,8	-0,717268	0,000020
9	0,9	-0,783211	0,000030
10	1,0	-0,841323	0,000043

Интерполяционный (неявный) метод Адамса, примененный для коррекции результатов, полученных по явному методу с начальным отрезком

$$w_0 = 0, w_1 = -0,099833, w_2 = -0,198670, w_3^{(0)} = -0,295515,$$

$$z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3^{(0)} = 0$$

и с точностью $\varepsilon = 0,00001$, дает результаты за 1 итерацию (табл. 2.8).

Таблица 2.8

I	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,000000	0,000000
1	0,1	-0,099833	0,000000
2	0,2	-0,198670	0,000000
3	0,3	-0,295521	0,000000
4	0,4	-0,389420	0,000000
5	0,5	-0,479427	0,000000
6	0,6	-0,564644	0,000000
7	0,7	-0,644220	0,000001
8	0,8	-0,717358	0,000001
9	0,9	-0,783329	0,000001
10	1,0	-0,841474	0,000001

2.6.5. Два подхода к исследованию устойчивости одношаговых и многошаговых методов

Остановимся на устойчивости численных методов решения задачи Коши для одного уравнения. Рассмотрим m -шаговое семейство линейных методов

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}), \quad (2.80)$$

где $i = m, m+1, \dots$, решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), x \in [a, b], \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Отметим, что для решения задачи (2.81) с помощью одного из методов (2.80) необходимо задать начальные значения $y_0, y_1, \dots,$

y_{m-1} .

Исследование устойчивости многошаговых методов осуществляется с помощью двух подходов. Первый – *упрощенный подход*, автором которого является шведский математик Дальквист, предложивший его в 50-х годах XX века. Суть подхода состоит в том, что нелинейное разностное уравнение, которое аппроксимирует ОДУ (2.81), само, в свою очередь,

аппроксимируется однородным линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$z_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j z_{i+1-j}. \quad (2.82)$$

Уравнение (2.82) получается из (2.80) отбрасыванием второго слагаемого в правой части, поскольку сходимость численного метода исследуется при условии $h \rightarrow 0$. Наличие множителя во втором слагаемом в (2.80) показывает, что это слагаемое играет незначительную роль, если функция f ограничена.

Как известно [7], поведение решения z_i разностного уравнения (2.82) и его свойства, в том числе аппроксимационные по отношению к ОДУ (2.81), непосредственно связаны с величинами корней характеристического уравнения

$$\lambda^m - \alpha_1 \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_{m-1} \lambda - \alpha_m = 0, \quad (2.83)$$

через которые можно выразить фундаментальные решения уравнения (2.82) и такого же уравнения для ошибок [12]. Дадим важное определение.

Определение 3. Говорят, что метод (2.80) удовлетворяет *условию корней*, если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ характеристического уравнения (2.83) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе единичного круга нет кратных корней [7, с.234].

Разностный метод (2.80), удовлетворяющий условию корней, называется *устойчивым методом*. Существует определенное ограничение на порядок аппроксимации устойчивого метода.

Приведем без доказательства следующую теорему [7].

Теорема 1. Пусть метод (2.80) удовлетворяет условию корней и имеет порядок аппроксимации p . Тогда $p \leq m + 1$ при m нечетном и $p \leq m + 2$ при m четном. Для явных m -шаговых устойчивых методов порядок аппроксимации не превосходит m .

Теорема 2. Пусть метод (2.80) удовлетворяет условию корней и $|f'_y(x, y)| \leq L$ при $a \leq x \leq b$. Тогда при $mh \leq x_n = nh \leq b$, $n \geq m$ и всех достаточно малых h выполнена оценка

$$|y_n - y(x_n)| \leq M \left(\max_{0 \leq j \leq N-1} |y_j - y(x_j)| + \max_{0 \leq k \leq n-N} |\psi_k| \right),$$

где ψ_k – погрешность аппроксимации, $y_j - y(x_j)$, $j = \overline{0, N-1}$, – погрешности в задании начальных условий и M – константа, зависящая от L, b , и не зависящая от n .

Доказательство теоремы 2 приведено в [7, с.245-247]. В довершение к сказанному выше, отметим, что если $m-1$ корней уравнения (2.83) по модулю меньше единицы, то *метод* (2.80) называется *строго устойчивым* или *сильно устойчивым* [12].

С помощью данного определения можно достаточно грубо оценивать устойчивость или неустойчивость методов, т.к. в этом определении не учитывается второе слагаемое из (2.80).

Применим введенное определение устойчивости к соответствующим одношаговым и многошаговым методам.

Пример 11. Рассмотрим явный и неявный метод Эйлера:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), \quad j = \overline{0, N-1}; \quad (2.84)$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_{j+1}, y_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (2.85)$$

Для них характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda - 1 = 0,$$

и $\lambda = 1$ – единственный корень характеристического уравнения.

Следовательно, эти методы устойчивы по Дальквисту.

Пример 12. Рассмотрим экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \sum_{i=0}^m \beta_i f(x_{j+1-i}, y_{j+1-i}), \quad j = m-1, m. \quad (2.86)$$

Характеристическое уравнение для метода Адамса имеет вид

$$\lambda^m - \lambda^{m-1} = 0.$$

Один корень этого уравнения равен 1, а остальные $m-1$ корней равны нулю. Следовательно, по теореме 1 метод Адамса строго устойчив по Дальквисту.

Аналогичное утверждение имеет место для метода Коуэлла.

Пример 13. Исследуем метод Милна четвертого порядка:

$$\tilde{y}_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4h}{3}(2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}), \quad (2.87)$$

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3}(\tilde{f}_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}). \quad (2.88)$$

Метод двухшаговый: первый шаг (2.87) – «прогноз», второй шаг (2.88) – «коррекция». Первая из формул является четырехшаговой и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. В силу двухшаговости формулы (2.88) характеристическое уравнение будет второй степени:

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Корни его $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Обе формулы определяют разностный метод, устойчивый по Дальквисту, но не строго устойчивый.

Второй подход исследования устойчивости численных методов обычно проводится на модельном уравнении вида $y' = p \cdot y$ (p – параметр как вещественный, так и мнимый) и базируется на сведениях о решении линейных разностных уравнений m -го порядка с постоянными коэффициентами вида [12, с.594-596]:

$$y_{j+1} = \alpha_1 y_j + \alpha_2 y_{j-1} + \dots + \alpha_m y_{j+1-m}. \quad (2.89)$$

Исследуем устойчивость метода Эйлера

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = 0, N-1, \quad (2.90)$$

$$y(a) = y_0$$

решения задачи Коши (2.81).

Метод Эйлера на модельном уравнении ($f(x, y) = p \cdot y$) запишется следующим образом:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot p \cdot y_j. \quad (2.91)$$

Введем обозначение

$$\delta_j = y(x_j) - y_j, \quad (2.92)$$

где $y(x_j)$ – значение точного решения задачи (2.81) в узле x_j , y_j – решение, полученное методом Эйлера в том же узле.

Предположим, что $y(x)$ и $f(x, y(x))$ обладают достаточной гладкостью и выполнены следующие условия [12, с.592-593]:

$|f'_y(x, y(x))| \leq c_1$, $|y''(x)| \leq c_2$ для любого $x \in [a, b]$, $c_1, c_2 > 0$ – произвольные константы.

Разложим функцию $y(x_{j+1})$ в точке x_j по формуле Тейлора:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + y'(x_j)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2,$$

где $\xi \in (x_j, x_{j+1})$. Полученный результат используем в следующей формуле:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} &= y(x_j) + y'(x_j)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2 - y_j - \\ - h f(x_j, y_j) &= \delta_j + h \left[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j) \right] + \\ &+ \frac{1}{2}y''(\xi)h^2. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Применим к разности функций в квадратных скобках формулу конечных приращений Лагранжа по второму аргументу и получим:

$$\delta_{j+1} = \delta_j + h f'_y(x_j, y_j) \delta_j + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2.$$

Так как для модельного уравнения $f(x, y) = p \cdot y$, то последнее соотношение переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} &= (1 + ph) \delta_j + O(h^2), \quad j = \overline{0, N-1}, \\ \delta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Второе слагаемое в (2.94) связано с погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения (2.81) разностной схемой (2.90). Влиянием этого члена на устойчивость метода Эйлера можно пренебречь. Характеристическое уравнение (2.83) [12, с.595] при $m = 1$ имеет вид $\lambda = \alpha_1$. Отсюда его единственным корнем будет $\lambda = 1 + p \cdot h$. Запишем фундаментальное решение [12, с.596]

$$\Delta_j = (1 + p \cdot h)^j \quad (2.95)$$

соответствующего однородного уравнения

$$\delta_{j+1} = (1 + p \cdot h) \delta_j.$$

По аналогии с формулой (16.29) из [12, с.596] частным решением неоднородного уравнения (2.94) будет

$$\bar{\delta}_j = \frac{O(h^2)}{1 - (1 + p \cdot h)} = O(h). \quad (2.96)$$

Тогда ошибка, накопленная к $(j+1)$ -му шагу по методу Эйлера (2.91), будет иметь вид:

$$\delta_j = C \cdot (1 + p \cdot h)^j + O(h), \quad (2.97)$$

причем, $C = \delta_0 - O(h)$, $\delta_0 = y(x_0) - y_0$. При $j \rightarrow +\infty$ δ_j будет ограниченной величиной, если будет справедливо неравенство:

$$|1 + p \cdot h| \leq 1. \quad (2.98)$$

Очевидно, что при $p > 0$ неравенство (2.98) не будет выполняться ни при каких $h > 0$.

Если $p < 0$, неравенство (2.98) запишется так:

$$|1 - |p| \cdot h| \leq 1 \text{ или } -1 \leq 1 - |p| \cdot h \leq 1.$$

Вначале рассмотрим неравенство $1 - |p| \cdot h \leq 1$. Оно справедливо при любом $h > 0$. Далее имеем:

$$-1 \leq 1 - |p| \cdot h \text{ или } |p| \cdot h \leq 2, \text{ или } h \leq \frac{2}{|p|}, \text{ или } h \leq -\frac{2}{p}.$$

Итак, метод Эйлера устойчив на модельном уравнении, если в этом уравнении $p < 0$, а шаг сетки удовлетворяет условию

$$h \leq -\frac{2}{p}.$$

В силу последнего неравенства метод Эйлера относится к *условно устойчивым методам*.

Исследуем устойчивость неявного метода Эйлера (2.85). На модельном уравнении метод имеет следующий вид:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot p y_{j+1}. \quad (2.99)$$

Используя ранее введенное обозначение (2.92), запишем разностное уравнение, которому удовлетворяет δ_j :

$$\delta_{j+1} = \frac{\delta_j}{1 - ph} + \frac{O(h^2)}{1 - ph}. \quad (2.100)$$

С учетом того, что $\lambda = \frac{1}{1 - ph}$, решение уравнения (2.100) может быть записано в виде:

$$\delta_j = C \cdot \lambda^j + \frac{O(h^2)}{(1 - ph) \left(1 - \frac{1}{1 - ph}\right)} = C \left(\frac{1}{1 - ph}\right)^j + O(h).$$

Из последнего выражения для δ_j видно, что погрешность с увеличением j не будет возрастать, если будет справедливо неравенство

$$\frac{1}{|1 - ph|} \leq 1. \quad (2.101)$$

Неравенство (2.101) равносильно неравенству

$$|1 - ph| \geq 1 \quad (2.102)$$

при условии, что $1 \neq ph$. Проведем анализ неравенства (2.101). Если $p < 0$, (2.101) будет справедливо при любых значениях $h > 0$. Это значит, что в этом случае неявный метод Эйлера будет *абсолютно устойчивым*. Для значений $p > 0$ погрешность δ_j будет ограниченной величиной при выполнении следующего неравенства:

$$h \geq \frac{2}{p}.$$

В заключение сделаем важное замечание.

Замечание. Вышеизложенные подходы к исследованию устойчивости численных методов для одного ОДУ легко обобщаются на случай системы ОДУ. Для этого вместо заданной системы ОДУ рассматривают модельное уравнение вида $y' = py$. Чтобы это уравнение моделировало систему ОДУ, необходимо его рассматривать при всех p , являющихся собственными значениями матрицы Якоби

$$A = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right).$$

2.7. Лабораторные задания

Задание. Применяя одношаговые и многошаговые численные методы, найти решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.

Варианты заданий

Вариант №1.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \\ y(0) &= 0, 4; \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Вариант №2.

$$\begin{aligned}y' &= \cos(x + y), \\ y(0) &= 0, 4; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №3.

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №4.

$$\begin{cases} y' = x^2 + z, \\ z' = y - z, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №5.

$$\begin{cases} y' = z^2 + x, \\ z' = xy, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = -0, 5; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №6.

$$\begin{aligned}y' &= e^{-x} - y, \\ y(0) &= 1; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №7.

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{x} + y, \\ y(0) &= 1; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №8.

$$\begin{aligned}y' &= y \sin(x) + x, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №9.

$$\begin{aligned}y' &= y \cos(x) + x, \\y(0) &= 0, 1; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №10.

$$\begin{cases}y' = x + y + z, \\z' = y - z;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = -1; x \in [0, 1].$$

Вариант №11.

$$\begin{cases}y' = xy + z, \\z' = y + xz;\end{cases} \\y(0) = 0; z(0) = 0, 5; x \in [0, 1].$$

Вариант №12.

$$\begin{cases}y' = x^2 - z, \\z' = y + x;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$$

Вариант №13.

$$\begin{cases}y' = y - z, \\z' = yz;\end{cases} \\y(0) = 0, 5; z(0) = 0; x \in [0, 1].$$

Вариант №14.

$$\begin{aligned}y' &= 2y - 3x^2 - 2, \\y(0) &= 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №15.

$$\begin{aligned}y' &= x + y\sqrt{x}, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №16

$$\begin{aligned}y' &= 1 + 0, 2y \sin(x) - y^2, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №17.

$$\begin{cases}y' = -xz, \\z' = \frac{y}{x};\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 0; x \in [0, 1].$$

Вариант №18.

$$\begin{cases}y' = (y + z)x, \\z' = (-y + z)x;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$$

Вариант №19.

$$\begin{cases}y' = -yz + \frac{\cos(x)}{x}, \\z' = -z^2 + \frac{2, 5x}{1 + x^2};\end{cases} \\y(0) = 0; z(0) = -0, 2; x \in [0, 1].$$

Вариант №20.

$$\begin{cases} y' = z - (2y + 0,25z)y, \\ z' = e^y - (2 + 2z)y; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №21.

$$y' = x \ln(y) + y \ln(x),$$
$$y(1) = 1; x \in [1,6].$$

Вариант №22.

$$y' = e^x - y,$$
$$y(0) = 0; x \in [0,2].$$

Вариант №23.

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$y(1) = 0,5; x \in [1,2].$$

Вариант №24.

$$\begin{cases} y' = z + 0,5, \\ z' = y - x; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №25.

$$y' = y \sin(x) - y^2,$$
$$y(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №26.

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 2, \\ z' = \frac{2}{x + 6y^2} + x + 1; \end{cases}$$

$y(0) = 0,1; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$

Вариант №27.

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2) + y + z, \\ z' = x + y - z^2 + 1; \end{cases}$$

$y(0) = 0,5; z(0) = 1; x \in [0,1].$

Вариант №28

$$\begin{cases} y' = \ln(2x + z), \\ z' = \sqrt{4x^2 + y^2}; \end{cases}$$

$y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0,4].$

Вариант №29.

$$y' = \frac{\cos(x)}{1 + y^2},$$

$y(0) = 0; x \in [0,4].$

Вариант №30.

$$y' = e^{-x}(y^2 + 1,04),$$

$y(0) = 0; x \in [0,1].$

Вариант №31.

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 4, \\ z' = \frac{2}{x + 4y} + x + 1; \end{cases}$$

$y(0) = 0, 1; z(0) = 0, 5; x \in [0, 1].$

Вариант №32.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + 2y^2} + z, \\ z' = \cos(2z) + x; \end{cases}$$

$y(0) = 0, 4; z(0) = 0, 4; x \in [0, 1].$

Вариант №33.

$$\begin{cases} y' = e^{-(y+z)} + 2x, \\ z' = x^2 + y; \end{cases}$$

$y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$

Вариант №34.

$$y' = -\frac{y}{x} - y^2 \ln(x),$$

$y(1) = 2; x \in [1, 2].$

Вариант №35.

$$y' = \frac{1}{\cos(x)} - y \operatorname{tg}(x),$$

$$y(0) = 2; x \in [0, 1].$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свейников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, том 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. - 512 с.
5. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 369 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 2. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
9. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М.: изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
10. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. – М.: Высшая школа, 1998. – 383 с.
11. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
12. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.
13. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: изд. ТГУ, ч. II, 2007. – 288 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка.
2. Теорема Коши.
3. Формулировка Задачи Коши для ОДУ n -го порядка.
4. Классификация методов решения задачи Коши для ОДУ.
5. Понятие о приближенных и численных методах.
6. Одношаговые и многошаговые численные методы, явные и неявные численные методы.
7. Пояснить понятие плохо обусловленной задачи на примере следующей задачи Коши:

$$y' = y - x,$$
$$y(0) = 1; x \in [0,100].$$

8. Аналитический метод разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши для ОДУ I порядка.
9. Метод последовательных приближений Пикара. Основная идея метода.
10. Численный метод Эйлера. Вывод явного метода Эйлера.
11. Оценка погрешности аппроксимации метода Эйлера.
12. Неявный метод Хьюна. Оценка погрешности аппроксимации.
13. Общий способ построения одношаговых вычислительных правил, предложенный Рунге и Куттой.
14. Два эквивалентных приема получения параметров (α) , (β) , (A) методов Рунге – Кутты.
15. Построение метода Рунге – Кутты первого порядка точности $(q = 0)$.
16. Метод второго порядка точности $(q = 1)$. Вывод расчетных формул.
17. Понятие о многошаговых методах решения задачи Коши для ОДУ I порядка.
18. Построить экстраполяционную формулу Адамса (случай $s = 0, q = 1$).
19. Построить интерполяционную формулу Адамса $(s = 1, q = -1)$.

20. Вывести многошаговое правило типа Коуэлла ($s = 2, q = 1$).
21. Обобщение многошаговых методов на систему ОДУ I порядка.
22. Подход Дальквиста к исследованию устойчивости многошаговых методов.
23. Понятие *условия корней* и его связь с устойчивостью метода.
24. С помощью подхода Дальквиста исследовать на устойчивость: а) явный метод Эйлера; б) неявный метод Эйлера.
25. Применить подход Дальквиста к исследованию устойчивости: а) экстраполяционного метода Адамса; б) интерполяционного метода Адамса.
26. Исследование устойчивости явного и неявного метода Эйлера на модельном уравнении (второй подход).
27. Применение второго подхода исследования устойчивости явного (неявного) метода Эйлера на случай системы ОДУ I порядка.