ЛИТЕРАТУРА

1. *Берж К.* Теория графов и ее применения. М., 1962. 319 с.
2. *Оре О.* Графы и их применение. М., 2002. 171 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов. М., 2003. 300 с.
4. *Татт У.* Теория графов. М.,1988. 424 с.
5. *Берцун В. Н.* Математическое моделирование на графах. Томск, 2006. Ч. I. 88 с.
6. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Толковый словарь по теории графов. Новосибирск, 1996. Ч. II. 84 с.
7. *Кристофидес Н.* Теория графов: алгоритмический подход. М., 1978.432 с.
8. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 336 с.
9. *Емеличев В.А., Мельников О.И.* и др. Лекции по теории графов. М., 1990. 384 с.
10. *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон.* Введение в конечную математику. М.: Изд. ИЛ, 1963. 486 с.
11. *Мельников О. И.* Теория графов в занимательных задачах. М., 2009. 232 с.
12. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
13. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. СПб. : Питер, 2001. 304 с.
14. *Костюкова Н. И.* Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов. М., 2007. 311 с.
15. *Колягин Ю. М., Саркисян А. А.* Познакомьтесь с топологией: На подступах к топологии. М., 2009. 136 с.
16. *Бондарев В. М., Рублинецкий В. И., Качко Е. Г.* Основы программирования. Ростов н/Д: Феникс, 1997. 368 с.
17. *Березина Л. Ю.* Графы и их применение. М.,1979. 143 с.
18. *Пермякова Н. В.* Спецглавы математики. Ч. 2: Теория графов. Томск, 2000. 125 с.
19. *Pedro F. Felzenszwalb and Daniel P. Huttenlocher.* Efficient Graph-Based Image Segmentation // International Journal of Computer Vision, 2004. Vol. 59, №. 2, p. 167-181.
20. *Маршалл У. Берн, Рональд Л. Грэм.* Поиск кратчайших сетей // В мире науки. 1989. № 3. С. 64-70.
21. *Самохин А. В.* Проблема четырех красок: неоконченная история доказательства // Соросовский образовательный журнал, 2000. Т. 6, № 7. С. 91-96.
22. *Макконелл Дж.* Анализ алгоритмов. Вводный курс. М.: Техносфера, 2002. 304 с.
23. *Воеводин В.В., Воеводин В.В.* Параллельные вычисления. Серия Научное издание. СПб.: BHV, 2002. 608 с.
24. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Наука,1987. 384 с.
25. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.,1977. 207 с.
26. *Асанов М. О., Баранский В. А. , Расин В. В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск, 2001, 288 с.
27. *Акимов О. Е.* Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. М., 2005. 656 с.
28. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М., 1959. Т. 2. 620 с.
29. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов: теория и применение. Киев, 1984. 383 с.
30. *Акимов О. Е.* Конструктивная математика. М., 2005. 294 с
31. *Елецкий А. В., Смирнов Б. М.* Фуллерены и структуры углерода. УФН. 1995. Т. 165, № 9. С. 977-1009.
32. *Робертс.* Дж. Расчеты по методу молекулярных орбит. М.: ИЛ, 1963.
33. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001, 320 с.
34. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 386 с.
35. *Прокушев Л. А.* Дискретная математика. СПб.: СПбГУАП, 2000. 82 с.
36. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Мир, 1981. 323 с.

37. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. 476 с.

38. *Гергель В.П.* Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Изд-во МГУ, 2010. 544 с.

39. *Старченко А. В., Данилкин Е. А., Лаева В. И., Проханов С.А.* Практикум по методам параллельных вычислений. М.: Изд-во МГУ, 2010. 200 с.

40. *Старченко А. В., Берцун В. Н.* Методы параллельных вычислений. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 223.с.

41. *Берцун В. Н., Бородин А. В.* Параллельные алгоритмы на графах // Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 82-86.

42. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 2007. 440 с.

43. *Берцун В. Н.* Сплайны сеточных функций. Томск: ТМЛ-Пресс, 2007.136 с.

44. *Годунов С. К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. 216 с.

45. *Якобовский М. В.* Обработка сеточных данных на распределенных вычислительных системах. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 2. С. 40-53.

46. *Борзунов Г. И., Войнов А. Е., Петрова Т. В.* Анализ методов повышения эффективности распределенных вычислений при решении задач безопасности информационных технологий // Безопасность информационных технологий. 2009. N. 4. С. 57–60.

47. *Волков К.Н.* Балансировка нагрузки процессоров при решении краевых задач механики жидкости и газа сеточными методами. Применение средств параллельного программирования для решения задач механики жидкости и газа на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т.13. С. 107–129.

48. *Fiedler M.* Eigenvectors of aciyclic matrices // Czechoslovak Mathematical Journal. 1975, 25(100). P. 607-618.

49. *Скиена С.* Алгоритмы. Руководство по разработке. СПб.: БХВ - Петербург, 2011. 720 с.

50. *Берцун В. Н , Минакова Е. А.*. Математическое моделирование теплообмена в элементах, имеющих графовую структуру // Исследования по баллистике и смежным вопросам. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 69-70.

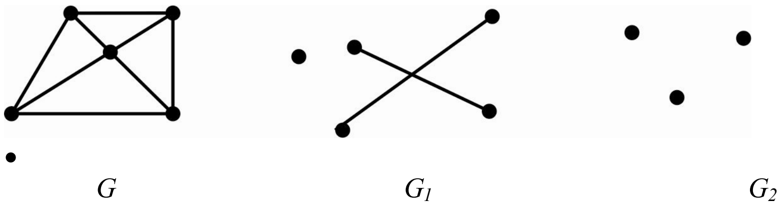
51. *Фрязинов И.В.* Алгоритм решения разностных задач на графах // ЖВМиМФ. 1970.Т. 10, №2. С. 474-477.

52. *Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука,1993. 367 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Задачи

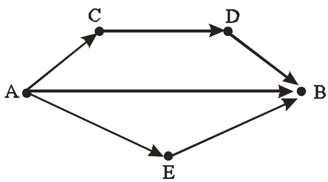
1. Записать матрицы *R, A* и *D* для графов



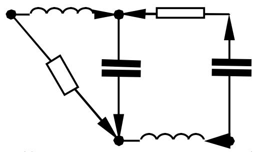
2. По матрице смежности *A* восстановить граф и его матрицу расстояний

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Определить порядок информационного графа и его путевую матрицу Q

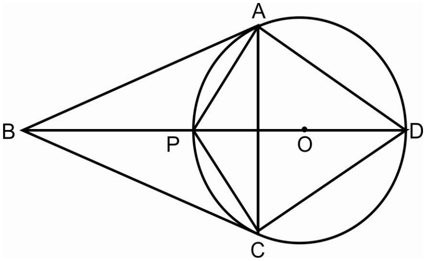


4. Для электрической цепи с сосредоточенными параметрами, где стрелка указывает опорное направление тока (+ $\rightarrow$ –),



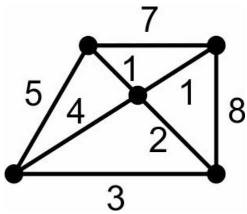
нарисовать соответствующий ориентированный граф и записать его матрицы *A*, *R* и *Ц(C)*.

5. Доказать, что если ABC является наибольшим углом остроугольного треугольника ABC, а ACD – правильный треугольник, с радиусом описанной окружности OD, то длина кратчайшей сети Штейнера равна отрезку BD и P–точка Штейнера.



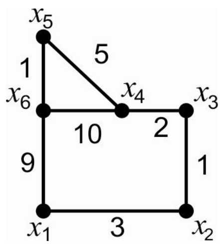
6. Паук связал паутину, соединяющую все вершины правильного тетраэдра. Чему равна наименьшая длина паутины, если ребро тетраэдра равно 1?

7. Определить остов минимального веса по алгоритму Прима.



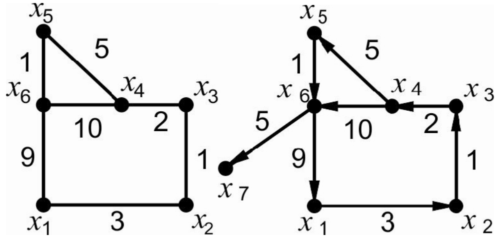
8. Определить барицентрические координаты точки Торичелли для равнобедренного треугольника с заданными координатами вершин.

9. Найти длину минимального остовного дерева из вершины x_1 в вершину x_5 по алгоритму Прима и кратчайший путь из x_1 в x_5.



10. Как можно модифицировать алгоритм Дейкстры для нахождения всех путей из одной вершины в другую в порядке возрастания их длин.

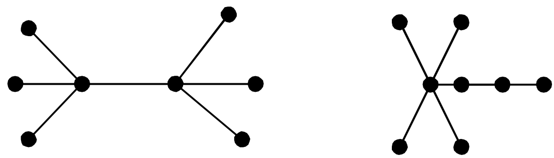
11. Определить кратчайшие расстояния от вершины x_4 до всех вершин графа G и G_1. В графе G найти две точки с наибольшим расстоянием между ними.



G *G₁*

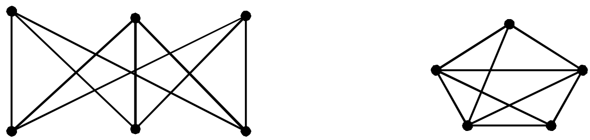
12. Существуют ли гамильтоновы циклы шахматного коня на шахматной доске (5×5)?

13. Проверить являются ли графы E и F коспектральными, и найти их спектр.

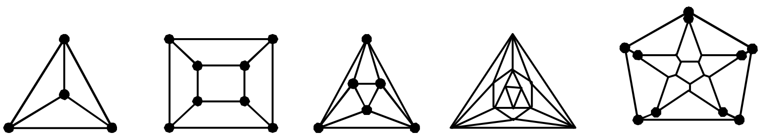


E *F*

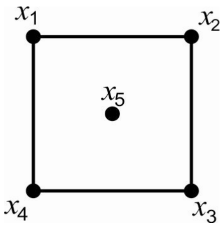
14. Найти хроматические многочлены графов

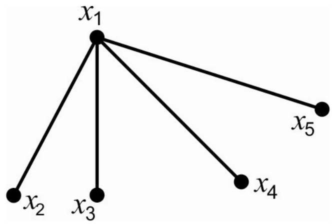


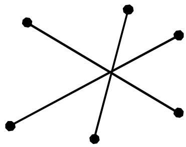
15. Определить хроматическое число одного из пяти правильных многогранников.



16. Найти характеристические многочлены и спектры графов







17. Записать матрицу смежности додекаэдра, пользуясь диаграммой Шлегеля. Найти спектр этого графа.

18. Для краевой задачи на собственные значения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\cdot u=0,\Omega=\{0<x,y<1\};u=0,(x,y)\in\Omega$$

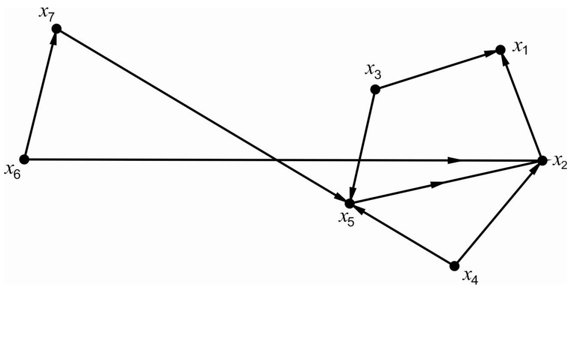
записать матрицу смежности сеточного графа на квадратной сетке для *h=0,25*.

19. Найти число внешней и внутренней устойчивости октаэдра и додекаэдра.

20. Из какого минимального количества кусков проволоки одинакового сечения можно спаять каркас куба?

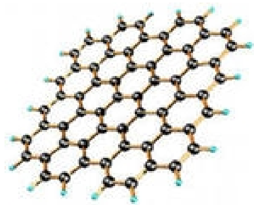
21. Пусть у гибкой шахматной доски из рис.2.23 склеен левый край с правым. Существует ли для такой цилиндрической доски решение задачи о 8 ферзях?

22. Существует ли ядро у орграфа

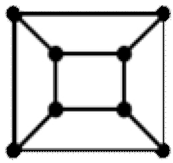


23. На плоскости в узлах регулярной сетки задано N точек $p_1, \ldots, p_N$. Определить приближенно точку p_o на плоскости, для которой суммарная длина до заданных точек минимальна. Сравнить ее положение с медианой сеточного графа.

24. Найти характеристический многочлен фрагмента графена, содержащего 22 шестиугольные ячейки, с помощью параллельного алгоритма, использующего степени матрицы смежности.

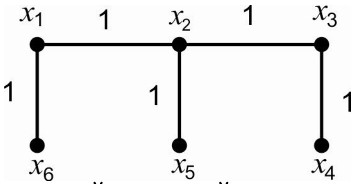


25. Используя вектор Фидлера, разделить граф на четыре домена.

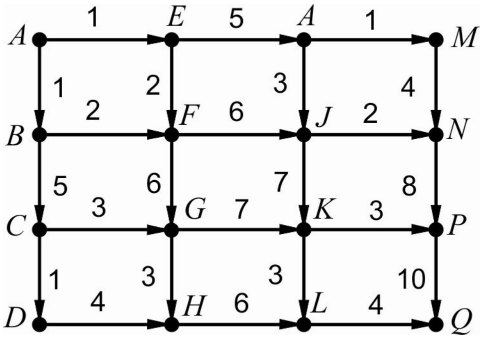


26. *Задача о пяти стаканах*: на столе кверху дном стоят 5 стаканов. Разрешается одновременно перевернуть любые 2 стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы встали на донышки? Для решения использовать граф изменения состояния системы.

27. Построить одну из сетей Штейнера для графа G, у которого длина каждого ребра равна 1.

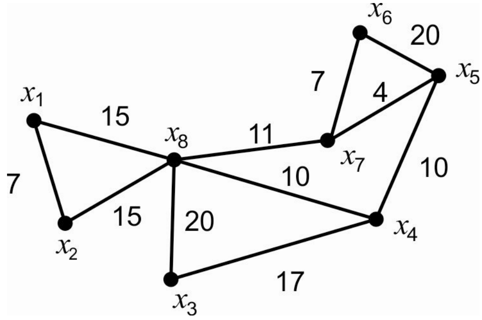


28. Нарисовать дерево кратчайших путей от вершины A до всех остальных вершин орграфа.



29. На графе G изображена система связи предприятий. Вероятность утечки информации при передаче (в процентах) соответствует весу p_{ij} ребра (x_i, x_j). Найти такое остовное дерево T, которое минимизирует величину утечки информации F при ее передаче между всеми предприятиями

$$F = 1 - \prod_{(x_i, x_j) \in T}^{n} (1 - p_{ij}).$$

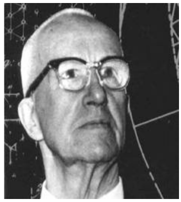

x_6
20
x_5
7
4
x_1
15
x_8
11
x_7
10
10
7
15
20
x_4
x_2
17
x_3

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Эдсгер Вибе Дейкстра (***Edsger Wybe Dijkstra,*** **1930-2002)** Нидерландский ученый, родился в Роттердаме. С 1952 г. работал программистом в Математическом центре Амстердама под руководством профессора Ван Вейнгаардена. Известность Дейкстре принесли его работы в области применения математической логики при разработке компьютерных программ. Он активно участвовал в разработке языка программирования Алгол и написал первый компилятор Алгол-60. Будучи одним из авторов концепции структурного программирования, Дейкстра проповедовал отказ от использования инструкции GOTO. Он предложил алгоритм нахождения кратчайшего пути на ориентированном графе с неотрицательными весами рёбер. В 1972 году Дейкстра стал лауреатом премии Тьюринга. В последние годы жизни преподавал в Техасском университете (США).

Ричард Бакминстер Фуллер (*Richard Buckminster Fuller,*1895-1983)

Американский архитектор, дизайнер, инженер и изобретатель. Фуллер написал двадцать восемь книг, ввел такие термины, как «космический корабль «Земля», «эфемеризация» и «синергетика». Он также сделал большое число изобретений, в основном в сфере дизайна и архитектуры, наиболее известным из которых является лёгкий и прочный «геодезический купол» - пространственная стальная сетчатая оболочка из прямых стержней



Открытая в 1985 г. новая *аллотропная форма углерода* была названа в честь Фуллера фуллеренами. В 1970 г. Фуллер получил Золотую медаль от Американского института архитекторов.

Роберт В. Флойд (*Robert W Floyd,* 1936-2001) Американский учёный в области теории вычислительных систем. В 27 лет Флойд стал адъюнкт-профессором при университете Карнеги - Меллон, а ещё через шесть лет - профессором в Стэнфорде. К известным достижениям Флойда относятся эффективный алгоритм поиска кратчайшего пути в ориентированных графах (алгоритм Флойда - Уоршелла) и алгоритм размывания (алгоритм Флойда - Стейнберга). В Стэнфорде Флойд тесно сотрудничал с Дональдом Кнутом и был главным редактором серии его знаменитых книг «Искусство программирования» ставших фундаментальным источником информации о разработке алгоритмов. Лауреат премии Тьюринга(1978 г.), награжден медалью «Пионер компьютерной техники» (1991 г.).

Я́коб Ште́йнер (*Jakob Steiner*, 1796–1863) Швейцарский математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей 2-го и высших порядков. В 1814 г. Якоб был принят для обучения в школу-интернат, руководимую И. Песталоцци, выдающимся швейцарским педагогом-гуманистом, одним из основоположников концепции развивающего образования. В 1821 г. Штейнер окончил Гейдельбергский университет и работал учителем математики. С 1835 г. он начал преподавание в Берлинском университете в качестве экстраординарного профессора математики, а в 1834 г. был избран членом Берлинской академии наук. Одно из исследований Штейнера было посвящено поиску точки, сумма расстояний от которой до всех точек заданного множества минимальна. Его работы по геометрии, а также его лекции в Берлинском университете послужили основанием для издания в 1867 г. книги под заглавием: «Jacob Steiner's Vorlesungen über Syntetische Geometrie, bearbeitet von Geiser und Schröter». Все его сочинения («Gesammelte Werke von Jacob Steiner») были изданы Вейерштрассом в Берлине (1881–1882 гг). Научные достижения Штейнера явились крупным вкладом в геометрию и находят различные применения в решении ряда актуальных проблем современной науки и техники.

Густав Роберт Кирхгоф (*Gustav Robert Kirchhoff,* 1824-1687) Немецкий физик, родился в Кёнигсберге. В 1846 г. окончил Кёнигсбергский университет. Кирхгоф был профессором университетов в Бреслау (1850 г.), Гейдельберге (1854 г.) и Берлине (1875 г.), возглавлял кафедру математической физики в Берлинском университете. Научную работу Кирхгоф начал ещё в студенческие годы. В 1845–1847 гг., занимаясь исследованием электрический цепей и представляя их в виде ориентированных графов, он открыл закономерности протекания тока в разветвлённых цепях (правила Кирхгофа). В 1857 г. Кирхгоф опубликовал статью о распространении переменного тока по проводам. В 1859 г. он заинтересовался анализом связи между процессами испускания и поглощения света. Совместно с Р. В. Бунзеном заложил основы спектрального анализа (1859 г.), открыл цезий (1860 г.) и рубидий (1861 г.). В 1859 г. на заседании Прусской академии наук Кирхгоф сделал сообщение об открытии закона теплового излучения, согласно которому отношение испускательной способности тела к поглощательной одинаково для всех тел при одной и той же температуре (закон Кирхгофа). В 1862 г. он ввел понятие «абсолютно чёрного тела» и предложил его модель – полость с небольшим отверстием. Его основные труды – «Исследования спектра Солнца и спектров химических элементов» (1861–1862 гг.) и «Лекции по математической физике» (в четырёх томах, 1874-1894 гг.) сыграли большую роль в развитии теоретической и прикладной физики.

Н а у ч н о е   и з д а н и е

Владимир Николаевич БЕРЦУН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГРАФАХ

Часть II

Редактор В.С. Сумарокова
Компьютерная верстка Т.В. Дьяковой

Подписано в печать 11.11.2013.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л.5,25; усл. печ. л.4,9; уч.-изд. л.4,5. Тираж 500. Заказ

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1